

Der größte gemeinsame Teiler (ggT) und das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)

Der ggT: Wenn man einen Bruch so weit kürzen soll wie möglich (haben wir ja mal gemacht), dann will man möglichst wenig Schritte verwenden und am liebsten mit einmal kürzen schon fertig sein. Damit man aber nur einmal kürzen muss, muss man wissen, was der größte Teiler ist, der sowohl im Zähler als auch im Nenner steckt.

Zähler und Nenner sind gerade → kürzen mit 2 wird also funktionieren

Die 3 steckt auch in der 12 → also kann man mit 3 kürzen

$$\text{Bsp.: } \frac{6}{24} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Einfacher wäre es aber, direkt mit 6 zu kürzen, da dies der größte gemeinsame Teiler von 6 und 24 ist.

$$\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

Um den ggT zu finden muss man jede Zahl in „Primfaktoren“ zerlegen, d.h. man muss die Zahl als ein Produkt aus Primzahlen schreiben.

$6 = 3 \cdot 2$ Sowohl die 3 als auch die 2 sind Primzahlen, also braucht man weiter hier nichts zu machen.

$24 = 12 \cdot 2$ Die 12 ist keine Primzahl, daher muss man hier noch weiter zerlegen.

$$\begin{aligned} 24 &= \overbrace{12} \cdot 2 \\ &= \overbrace{6} \cdot 2 \cdot 2 \quad \text{Die 6 ist keine Primzahl} \rightarrow \text{Man muss weiter zerlegen.} \\ &= \overbrace{3 \cdot 2} \cdot 2 \cdot 2 \quad \text{Jetzt liegen nur noch Faktoren vor, die aus Primzahlen bestehen.} \end{aligned}$$

Für die Zahlen 6 und 24 gilt also:

$$\begin{aligned} 6 &= 3 \cdot 2 \\ 24 &= 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \end{aligned}$$

gemeinsame Teiler: 3 2 $\Rightarrow 3 \cdot 2 = 6$ (größter gemeinsamer Teiler)

Man schreibt: **ggT (6 ; 24) = 6**

Merke: Das Produkt aus allen gemeinsamen Teiler ergibt den größten gemeinsamen Teiler (ggT)!

Aufgaben: Bestimme den ggT von 36 und 48.

Bestimme den ggT von 30 und 75. Was gilt für ggT (25 ; 30 ; 75)?

Das kgV: Um bei zwei Brüchen den kleinsten Hauptnenner (also den kleinsten gemeinsamen Nenner) zu finden, muss man das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden ursprünglichen Nenner bestimmen.

Merke: Ein Hauptnenner ist immer ein gemeinsames Vielfaches der beiden Ausgangsnenner!

Auch hier muss man Zahlen in Primfaktoren zerlegen.

Bsp.: $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{8}$ (Man kann natürlich $6 \cdot 8$ rechnen und sagen, dass 48 ein gemeinsamer Nenner ist; das wäre auch zweifellos richtig. Es ist aber nicht der kleinste gemeinsame Nenner!)

Hier mal die Primfaktorzerlegung von 6 und 8

$$6 = 3 \cdot 2$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Man schreibt gleiche Faktoren untereinander. Anschließend schreibt man alle Faktoren, die vorkamen noch einmal auf, wobei ein Faktor, der bei beiden Zahlen vorkam nur einmal gezählt wird!

$$\begin{array}{ccccccc} 6 & = & 3 & \cdot & 2 & & \\ 8 & = & \downarrow & & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 \\ & & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 3 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & = & 24 \end{array}$$

Der kleinste gemeinsame Teiler von 6 und 8 ist daher 24.

Man schreibt: $\text{kgV}(6; 8) = 24$

$$\frac{1}{6} = \frac{4}{24}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{3}{24}$$

Aufgaben: Bestimme das kgV von 12 und 18.

Bestimme das kgV von 18 und 27. Was gilt für $\text{kgV}(15; 18; 27)$?

Zusammengefasst: Für den ggT zählt man nur gemeinsame Teiler (Einmal! Nicht doppelt!) und multipliziert diese.

Für das kgV zählt man alle Teiler (die gemeinsamen nur einmal und nicht etwa doppelt!) und multipliziert diese.