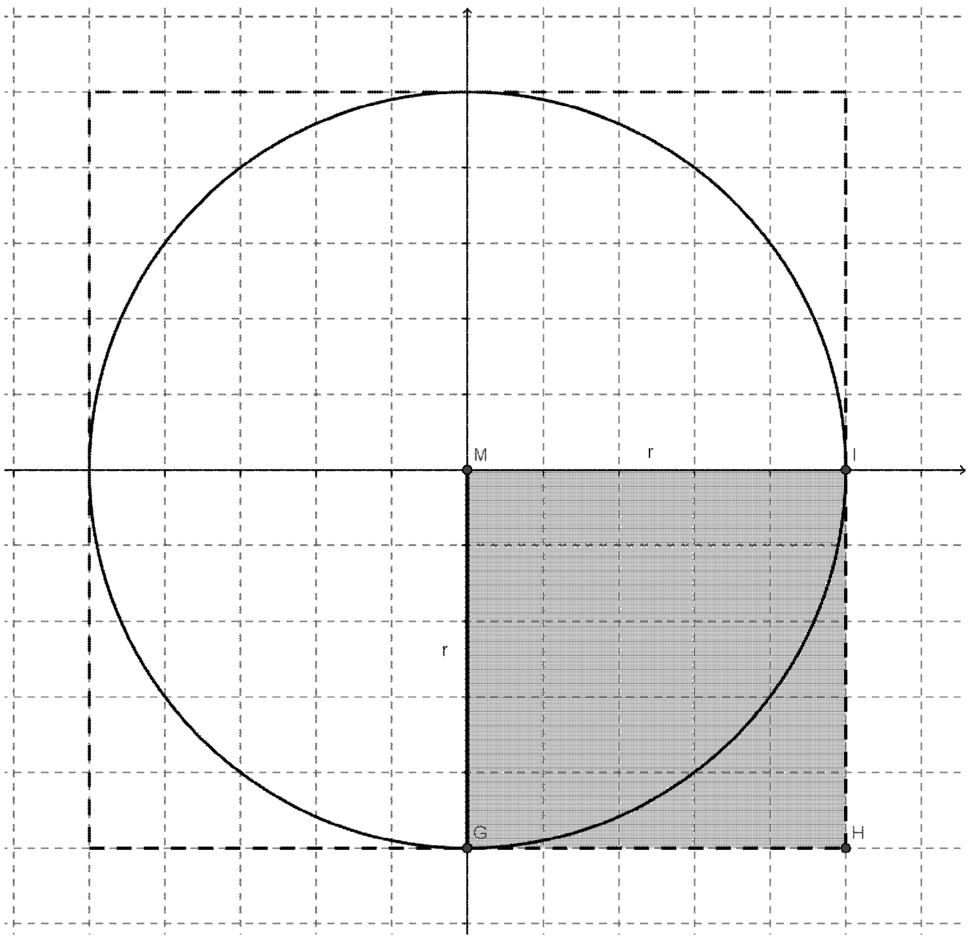
Untersuchungen am Kreis

Wir wissen mittlerweile, mit welchen Formeln man bei „eckigen“ Figuren den Flächeninhalt bestimmt. Doch wie macht man das bei „runden“ Figuren, z.B. beim Kreis?

Wenn man in der Mathematik vor einem neuen Problem steht, versucht man in der Regel, dass Problem mit bereits bekannten Mitteln zu lösen oder zumindest eine Lösungsidee zu erhalten.
Im Falle des Kreises kann man z.B. probieren, den Flächeninhalt mit Hilfe von eckigen Figuren, z.B. Quadraten, anzunähren. Ganz exakt wir man es damit nicht hinbekommen, denn schon die antiken Griechen hatten bemerkt, dass die „Quadratur des Kreises“, also die Umwandlung eines Kreises in ein flächengleiches Quadrat, offenbar nicht möglich ist.[1]

Gegeben ist ein Kreis mit dem **Radius r**. Der Radius ist also nicht näher festgelegt, sondern wird durch die Variable r beschrieben. Es ist also egal, ob wir jetzt einen Kreis mit 1cm- oder 5cm-Radius betrachten.



Den Kreisinhalt nennen wir A. Erkläre in eigenen Worten, dass folgende Abschätzung gilt:

$$2r^2 < A < 4r^2$$

[1] Daher sagt man bei Dingen, die man unmöglich ausführen kann, als Sprichwort heute noch: „Das ist die Quadratur des Kreises“.

Die Abschätzung zeigt, dass sich der Flächeninhalt berechnen lässt, in dem man r^2 mit einer Zahl multipliziert, die irgendwo zwischen 2 und 4 liegt. Diese „Kreiszahl" benannten die Griechen mit dem Buchstaben **„Pi" - π** (in unserem Alphabet ein kleines p).

Es scheint für den Flächeninhalt des Kreises somit folgende Formel zu existieren:

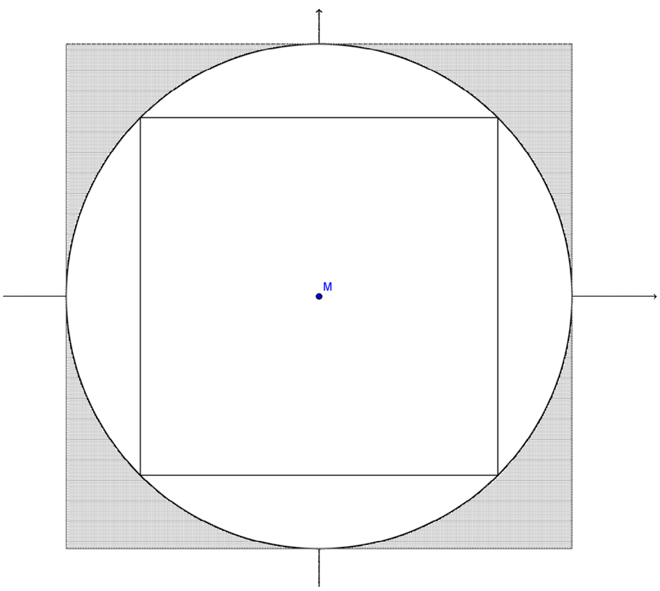
$$\boxed{\mathbf{A = \pi \cdot r^2}}$$

Die Frage ist nur, wie groß diese gesuchte Zahl π tatsächlich ist.

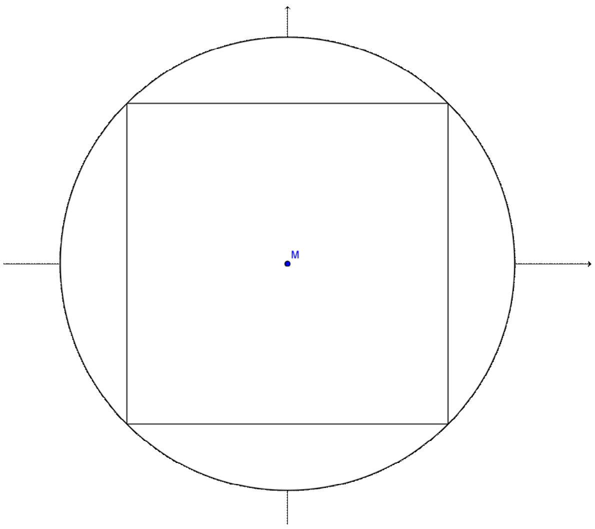
Wir hatten vorhin den Kreis mit einem Quadrat abgeschätzt, dessen Kantenlänge dem Kreisradius entsprach. Man kann leicht erkennen, dass diese Abschätzung eher schlecht ist, da der Quadratinhalt entweder viel zu groß oder viel zu klein ist.

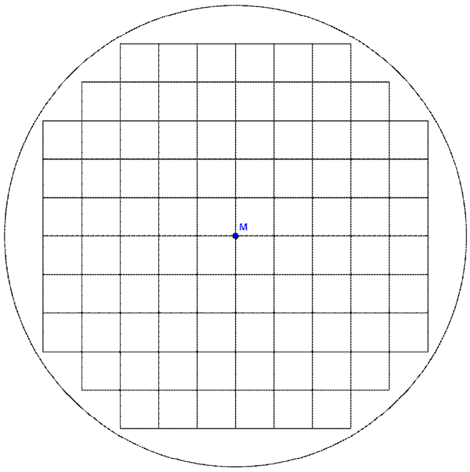
Entweder man hat bei dem großen Quadrat zu viel Fläche betrachtet oder bei dem kleinen Quadrat zu wenig Fläche im Vergleich mit dem Kreis.

Überlege wie man die Abschätzung des Kreisinhalts mit Hilfe von Quadraten besser hinbekommt.



Wir versuchen den Kreisinhalt mit Hilfe kleinerer Quadrate auszuschöpfen, da man sich mit vielen kleinen Quadraten besser der Kreislinie nähern kann.

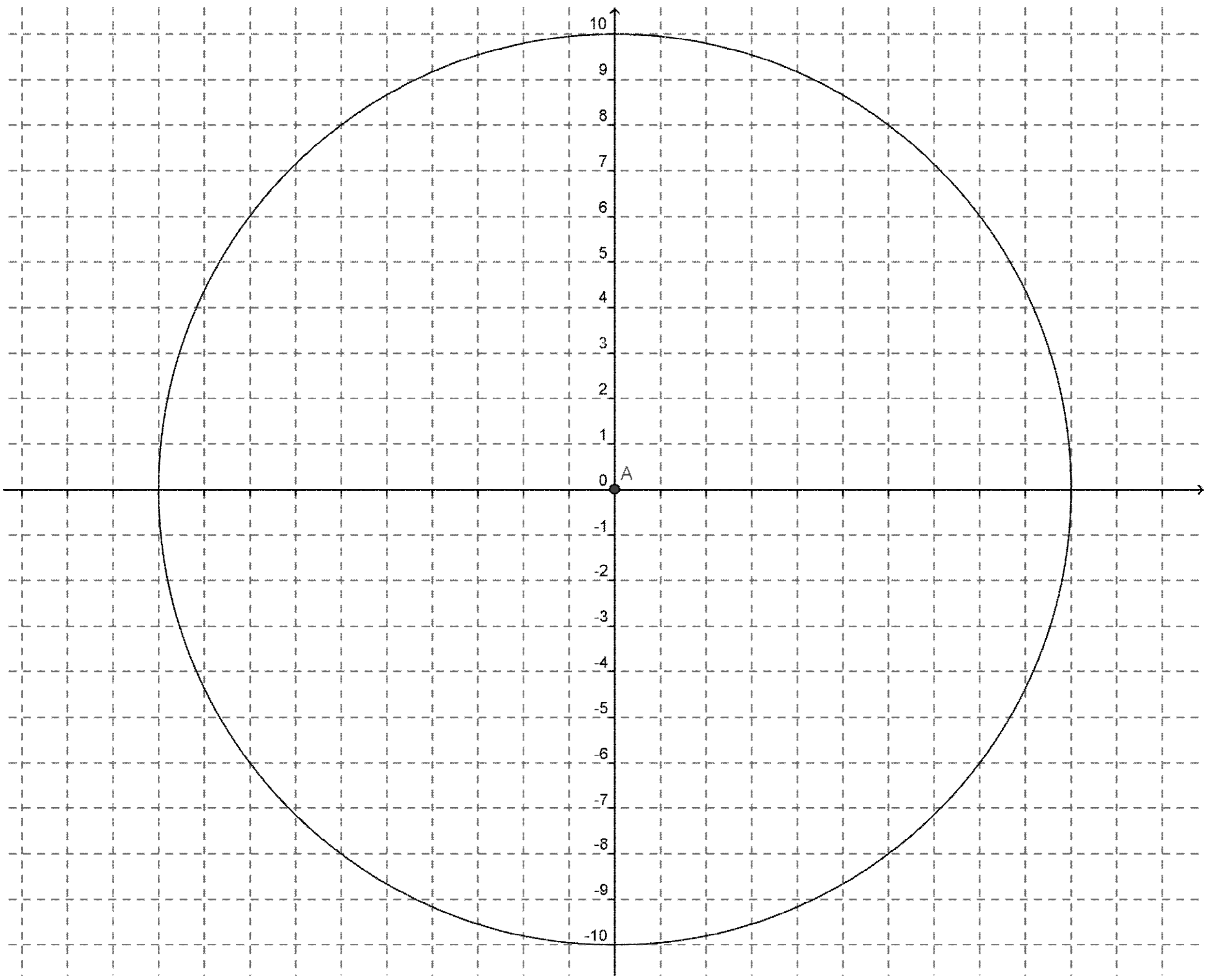




Auf geht´s zum Zählen:

Im folgenden Kreis (Radius r = 10cm) besitzt jedes Kästchen die Kantenlänge 1cm.

1. Zähle alle ganzen Kästchen, die innerhalb des Kreises liegen.
2. Zähle alle ganzen Kästchen, sodass diese den gesamten Kreis abdecken.



Anzahl der Quadrate innerhalb: ___________ $\Longrightarrow$ Fläche A_1 = ___________

Anzahl der Quadrate, die den Kreis vollständig abdecken: ___________ $\Longrightarrow$ Fläche A_2 = __________

Es müssen folgende Abschätzungen gelten:

$$A_1 < A_{Kreis}$$

$$\Longrightarrow \_\_\_\_\_\_\_ < \pi \cdot (10cm)^2$$

$$\Longrightarrow \_\_\_\_\_\_\_ < \pi$$

---

und

$$A_{Kreis} < A_1$$

$$\Longrightarrow \pi \cdot (10cm)^2 < \_\_\_\_\_\_\_$$

$$\Longrightarrow \pi < \_\_\_\_\_\_\_$$

Im Laufe der Zeit konnte man π immer genauer bestimmen und man sah, dass die Zahl unendlich viele Kommastellen besitzt und nicht durch einen Bruch dargestellt werden kann. π ist somit keine rationale Zahl, π ist **irrational**[2].

Im Alltag genügt es, π zu runden: $\boxed{\pi \approx 3{,}14}$

Und hier noch was zum Nachdenken:

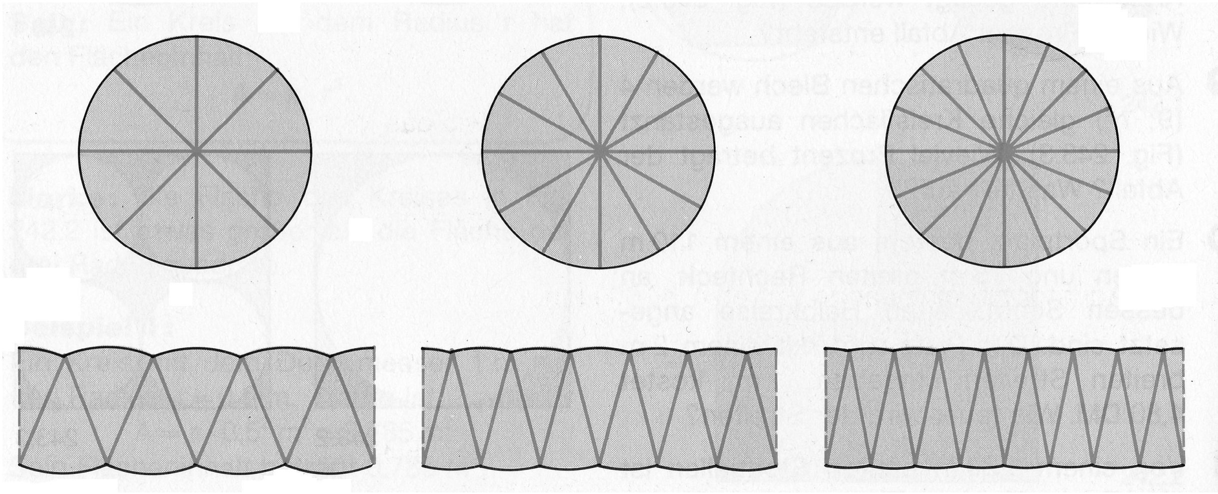
Man könnte sich jetzt folgende Frage stellen:
„Ein Kreis ist eine abgeschlossene Figur, muss also einen endlichen Flächeninhalt haben. Wenn man den Flächeninhalt jedoch mit Pi berechnet und Pi unendliche viele Kommastellen hat, warum kommt dann kein unendlich großer Flächeninhalt heraus?"
Man erkennt hier ein Problem, mit dem sehr viele Menschen in der Mathematik Probleme haben, der Begriff „Unendlich". Pi ist nicht unendlich groß, es hat nur unendlich viele Kommastellen! Das ist ein wichtiger Unterschied. Pi ist z.B. eindeutig kleiner als 4. Somit besitzt also ein Kreis mit dem Radius r = 1 gemäß $A = \pi \cdot r^2$ einen Flächeninhalt, der ganz bestimmt kleiner als 4 ist. Der Kreis ist also auch rechnerisch nicht unendlich groß.
Einen ähnlichen Fall haben wir z.B. auch bei der Zahl 1/3. Auch sie hat unendlich viele Kommastellen. Die Rechnungen mit ihr liefern jedoch endliche Ergebnisse.

---

[2] In Klasse 9 werden wir noch eine ganze Reihe weiterer irrationaler Zahlen kennenlernen, z.B. die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ („Wurzel 2).

Kommen wir abschließend noch zum Kreisumfang u.

Man kann, wie man es bereits bei der Bruchrechnung gemacht hat, einen Kreis in Kuchenstücke aufteilen. Ordnet man diese Stücke neu an, entsteht einen Art Rechteck. Die Fläche ähnelt umso mehr einem Rechteck, je mehr Kuchenstücke wir zur Verfügung haben.



Welche Länge und welche Breite besitzt die rechteckähnliche Figur ungefähr?
(Der Kreis hat den Radius r und den Umfang u.)

Länge $\approx$

Breite $\approx$

Hinzu kommt, dass die Fläche der Figur ja immer noch mit der Fläche des Kreises übereinstimmt. Somit gilt ungefähr:

$$A_{\text{Kreis}} \approx A_{\text{Rechteck}}$$

$$\pi \cdot r^2 \approx \underline{\qquad\qquad}$$

Stellt man sich in Gedanken unendliche viele Stücke vor, könnte man sogar ein „ = “ schreiben:

$$\pi \cdot r^2 = \underline{\qquad\qquad}$$

Umgestellt nach u erhält man folgende Formel für den Kreisumfang:

$$\boxed{u = \underline{\qquad\qquad\qquad}}$$

Da $2 \cdot r = d$ ist (doppelter Radius ist gleich dem Durchmesser des Kreises) gilt auch:

$$\boxed{u = \frac{\qquad\qquad}{\underline{\qquad\qquad}} \quad ([3])}$$

[3] Man sagt daher auch schon mal: „Pi ist das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser.“