$\sqrt{2}$ ist irrational.

Gegenteil: $\sqrt{2}$ ist rational (also als Bruch darstellbar)

Widerlegung des Gegenteils: Wenn $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Q}$ mit $a \perp b$: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2}$

$\Rightarrow 2b^2 = a^2$

(Die linke Seite ist durch den Faktor 2 gerade und somit auch $a^2$ !)

$\Rightarrow b^2 = \frac{a^2}{2}$

Wenn nun auch a gerade **wäre**, könnte man a durch z.B. 2c ersetzen

$\Rightarrow b^2 = \frac{(2c)^2}{2}$

$\Rightarrow b^2 = \frac{4c^2}{2}$

$\Rightarrow b^2 = 2c^2$

Damit wäre auch $b^2$ gerade. Wenn daraus folgen würde, dass auch b gerade ist, hätte man einen Widerspruch, da a und b doch nicht teilerfremd sind.

Frage: Gilt, dass, wenn $a^2$ gerade ist, auch unbedingt a gerade ist?
Man könnte auch Fragen: Kann nur durch Quadrieren einer geraden Zahl ein gerades Quadrat entstehen?

Lemma: Quadrate gerade und ungerader Zahlen sind stets gerade bzw. ungerade.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{Z}$.

1. Wenn x gerade, dann gilt: $x = 2y$ mit $y \in \mathbb{Z}$
   $\Rightarrow x^2 = (2y)^2$
   $\Rightarrow x^2 = 2 \cdot (2y^2)$
   $\Rightarrow x^2$ ist gerade.

2. Wenn x ungerade, dann gilt: $x = 2y+1$
   $\Rightarrow x^2 = (2y+1)^2$
   $\Rightarrow x^2 = 4y^2 + 4y + 1$
   $\Rightarrow x^2 = 2 \cdot (2y^2 + 2y) + 1$
   $\Rightarrow x^2$ ist ungerade

Da das Lemma bewiesen ist, kann man das Gegenteil der anfänglichen Aussage widerlegen.
Folglich stimmt die anfängliche Aussage, dass $\sqrt{2}$ irrational ist!