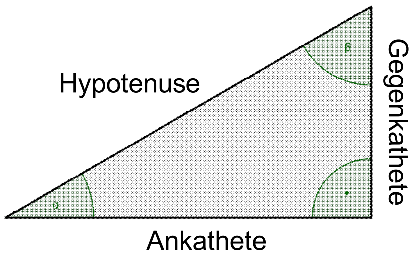
Einführung Trigonometrie

Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel $\alpha = 30°$.

Die Katheten werden unterschieden in die Kathete, die bei α liegt (**Ankathete**) und die, die α gegenüber liegt (**Gegenkathete**).



Fülle die erste Zeile der nachfolgende Tabelle aus:

Hypotenuse	Ankathete	Gegenkathete	α	β	$\frac{Gegenkathtete}{Hypotenuse}$	$\frac{Ankathtete}{Hypotenuse}$	$\frac{Gegenkathtete}{Ankathete}$
			30°				
			30°				
			30°				
			30°				

In einem rechtwinkligen Dreieck, ist bei konstantem Winkel α das Verhältnis aus Gegenkathete zu Hypotenuse usw. konstant. Es besteht somit eine eindeutige Zuordnung zwischen dem Winkel α und den Seitenverhältnissen.

Diese Zuordnungen (Funktionen !) werden Sinus, Kosinus und Tangens genannt.

Der funktionale Zusammenhang zwischen α und den Seitenverhältnissen entspricht unserer bekannten Funktionsdarstellung mit den Variablen x und y:

x – Wert $\rightarrow$ y – Wert $\Longrightarrow$ Funktion f(x)

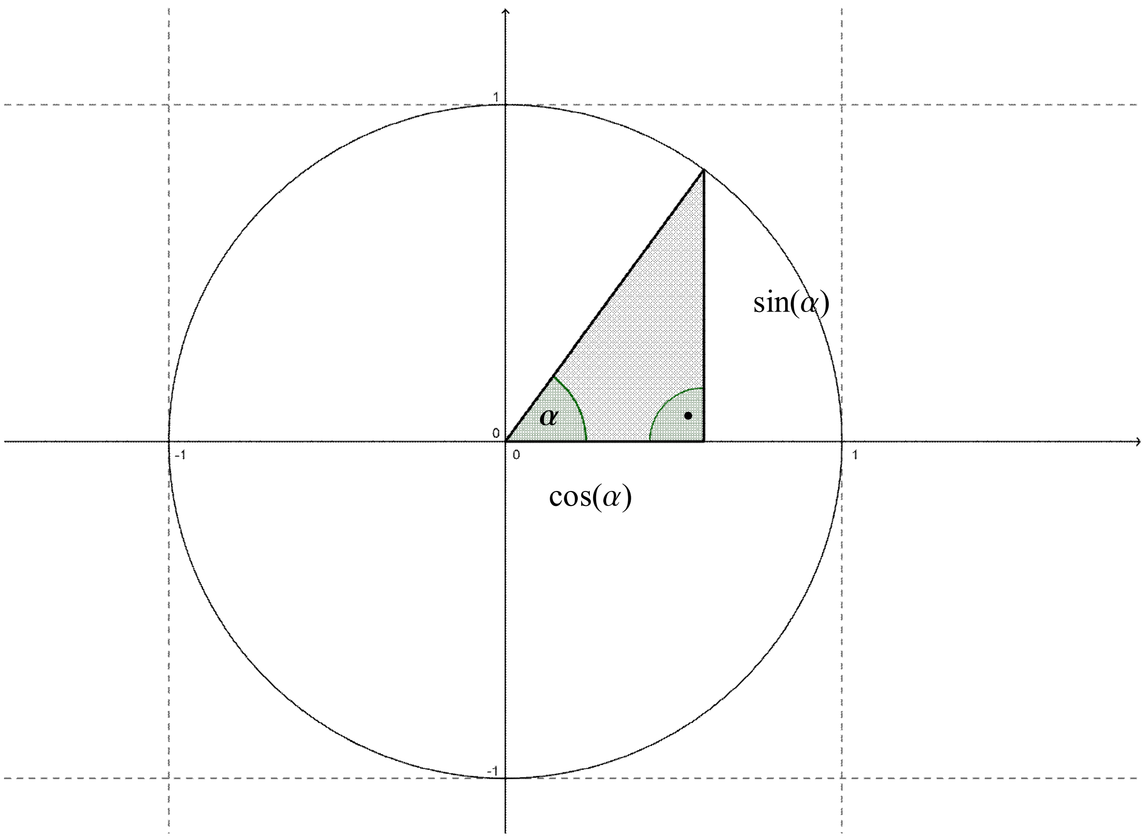
Winkel α $\rightarrow$ Seitenverhältnis $\Longrightarrow$ Funktion $\sin(\alpha)$ für $\frac{Gegenkathtete}{Hypotenuse}$

Funktion $\cos(\alpha)$ für $\frac{Ankathtete}{Hypotenuse}$

Funktion $\tan(\alpha)$ für $\frac{Gegenkathtete}{Ankathete}$

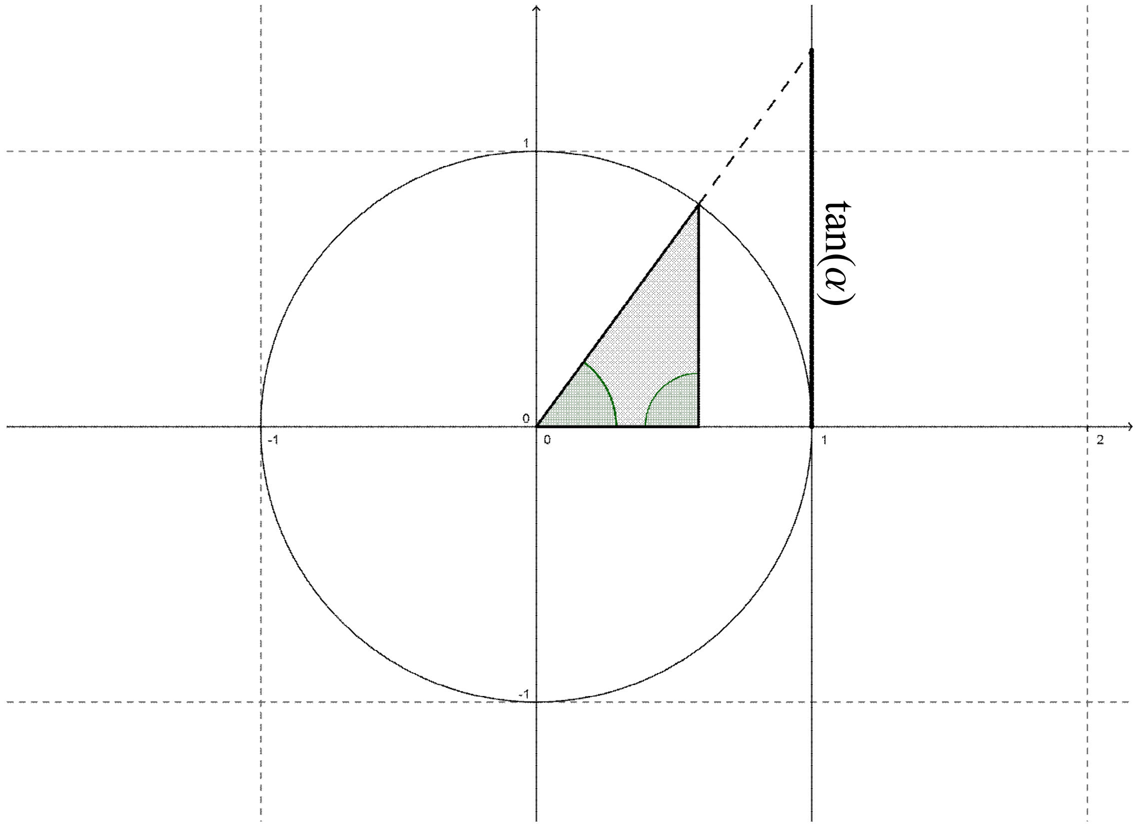
In einem rechtwinkligen Dreieck mit $\alpha = 30°$ ist sin (30°) = 0,5 da $\frac{Gegenkathtete}{Hypotenuse} = 0{,}5$.

Um Gesetzmäßigkeiten zwischen Sinus, Kosinus und Tangens zu erkennen, betrachtet man ein standardisiertes Dreieck, das Dreieck mit der Hypotenuse c = 1. Dieses wird in einem Einheitskreis (r = 1) gezeichnet:



Wie lässt sich in dem abgebildeten Dreieck der Wert für $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ ablesen?

Der Tangens lässt sich nicht auf direktem Weg ablesen. Er wird durch einen Tangentenabschnitt ausgedrückt:



Aufgabe:

Begründe, dass diese Strecke dem Verhältnis $\frac{Gegenkathtete}{Ankathete}$ entspricht. *(Hinweis: Strahlensatz)*

$$\frac{\tan}{1} = \frac{\sin}{\cos} = \frac{\frac{gegen}{hypo}}{\frac{anka}{hypo}} = \frac{gegen}{anka}$$

Aufgabe:

Begründe mit Hilfe des Einheitskreises, dass

a) $\sin(0°) = 0$ und $\sin(90°) = 1$

b) $\cos(0°) = 1$ und $\cos(90°) = 0$

c) $\sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\sin(45°) = \cos(45°)$

Gleichschenklig! $a^2 + a^2 = 1^2$

$\Longrightarrow a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

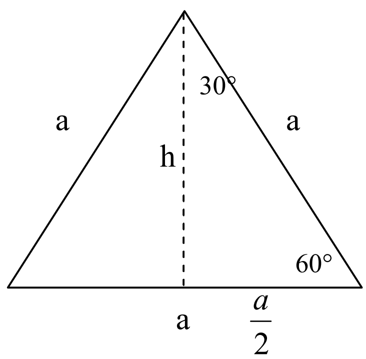
Aufgabe:

Begründe mit Hilfe eines gleichseitigen Dreiecks, dass

a) $\sin(30°) = \frac{1}{2}$

b) $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

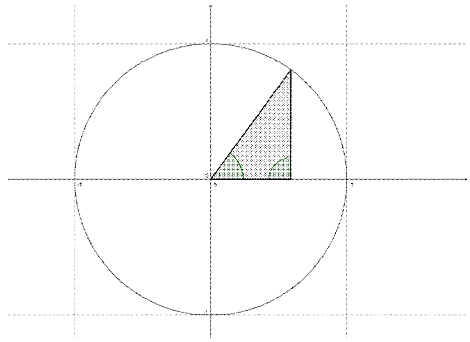
c) $\tan(60°) = \sqrt{3}$ und $\tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$



Mit Pythagoras:

$h = \sqrt{3}\,\frac{a}{2}$

Weitere trigonometrische Zusammenhänge:

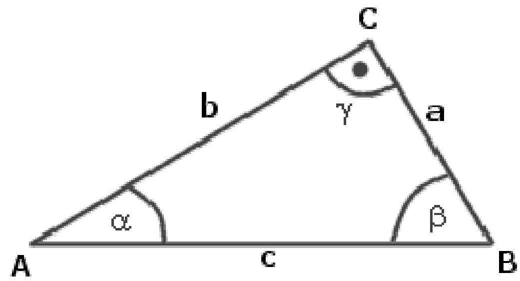


1. Bestimme $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$. ($0° \leq \alpha \leq 90°$)

   $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

   Der Zusammenhang folgt mit Pythagoras

   direkt aus dem Einheitskreis.



2. Begründe, dass $\underline{\mathbf{\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha)}}$.

   $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ $\cos(\beta) = \cos(90° - \alpha)$

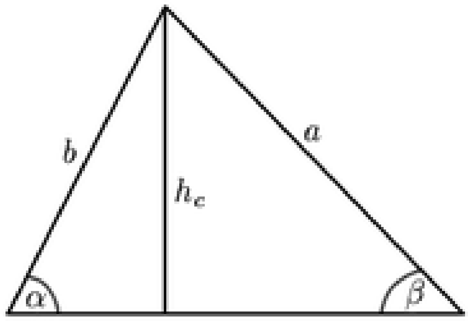
3. Begründe, dass $\underline{\mathbf{\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha)}}$.

   Beweis ist äquivalent zu Nr. 2.

4. Dieser Zusammenhang kam bereits vor: $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Sinussatz

Die eingezeichnete Höhe h_c zerlegt das Dreieck in zwei rechtwinklige Teildreiecke, in denen man die Sinuswerte von α und β jeweils als Quotient von Gegenkathete und Hypotenuse ausdrücken kann:



$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

Auflösen nach h_c ergibt:

$$h_c = b \cdot \sin\alpha$$

$$h_c = a \cdot \sin\beta$$

Durch Gleichsetzen erhält man demnach

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha\ .$$

Dividiert man nun durch $\sin\beta \cdot \sin\alpha$, so erhält man den ersten Teil der Behauptung:

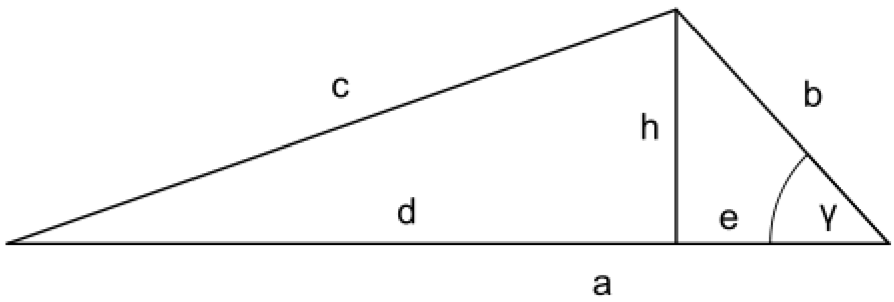
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Die Gleichheit mit $\frac{c}{\sin\gamma}$ ergibt sich entsprechend durch Benutzung der Höhe h_a oder h_b.

Kosinussatz

Winkel < 90°:

Im folgenden Beweis wird $\gamma < 90°$ vorausgesetzt. Für $\gamma > 90°$ muss der Beweis geringfügig modifiziert werden. Für $\gamma = 90°$ ergibt sich der Kosinussatz direkt aus dem Satz des Pythagoras.



In den Teildreiecken soll der Satz des Pythagoras angewandt werden, um einen Rechenausdruck für c^2 zu finden. Dazu benötigt man die Quadrate der Kathetenlängen dieses Teildreiecks:

$h^2 = b^2 - e^2$ (Satz des Pythagoras für das rechte Teildreieck)
$d^2 = (a - e)^2 = a^2 - 2ae + e^2$ (binomische Formel)

Nach Pythagoras gilt für das linke Teildreieck:

$$c^2 = h^2 + d^2$$

Es müssen also die beiden oben gefundenen Rechenausdrücke addiert werden:

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2ae + e^2 = a^2 + b^2 - 2ae$$

Nun gilt

$$\cos\gamma = \frac{e}{b} \left(= \frac{Ankathete}{Hypotenuse} \right)$$

mit der Folgerung

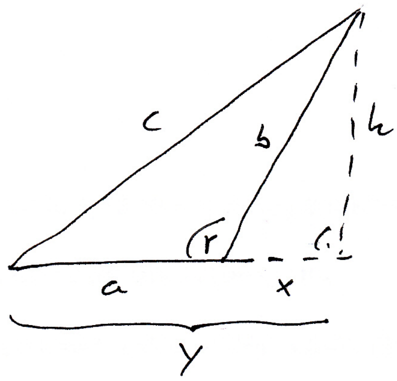
$$e = b \cdot \cos\gamma .$$

Einsetzen dieses Zwischenergebnisses in die Gleichung für c^2 ergibt die Behauptung:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

Winkel = 90°: Da cos(90°) = 0 reduziert sich der Ausdruck auf den Satz des Pythagoras für rechtwinklige Dreiecke.

Winkel > 90°:



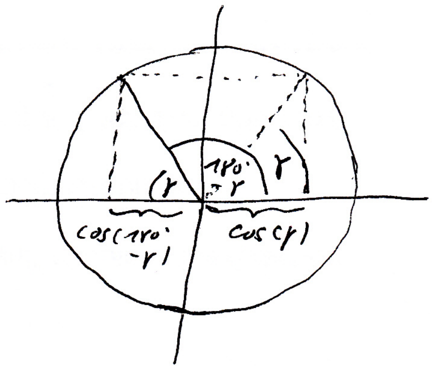
I $c^2 = h^2 + (a+x)^2$

II $h^2 = b^2 - x^2$

II in I $c^2 = b^2 - x^2 + (a+x)^2$

$= b^2 - x^2 + a^2 + 2ax + x^2$

$= b^2 + a^2 + 2ax$



Es ist $\cos(180° - \gamma) = \frac{x}{b}$

$b \cdot \cos(180° - \gamma) = x$

$b \cdot (-\cos(\gamma)) = x$

$\Rightarrow c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$