Verhalten der Funktion an der Polstelle

Wir haben bereits gesehen, dass es häufig nicht damit getan ist, Pol-Stellen zu ermitteln, um anschließend den Graph skizzieren zu können. Des öfteren stellt sich die Frage, ob die Funktion in der Nähe der Asymptote nach oben oder unten „ausbricht“.

Es ist demnach wichtig zu wissen, wie sich die Funktion verhält, wenn man sich unendlich dicht an die Pol-Stelle x_P und damit an die senkrechte Asymptote annähert und zwar sowohl von links als auch von rechts!

wenn man sich von links nähert

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to x_p\\ x<x_p}} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\substack{x\to x_p\\ x>x_p}}}$$

wenn man sich von rechts nähert

Betrachten wir das Beispiel f(x) = $\frac{x-3}{x+1}$:

1. Die Pol-Stelle lautet x_P = -1.

2. Wenn wir nun mit x ein wenig (!) kleiner sind als –1, z.B. –1,01, ergibt sich für den

   a) Zähler: ein negativer Wert

   b) Nenner: ein negativer Wert

   D.h., der Wert der Bruches ist demnach positiv (genauer: 401 !)

   $\Rightarrow$ Die Funktion bricht nach oben aus, wenn wir uns von links annähern.

   $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_p\\ x<x_p}} f(x) = +\infty$

3. Wenn man ein klein wenig größer als –1 ist, z.B. –0.99, wir uns also von rechts der Pol-Stelle nähern, so ergibt sich für den

   a) Zähler: ein negativer Wert

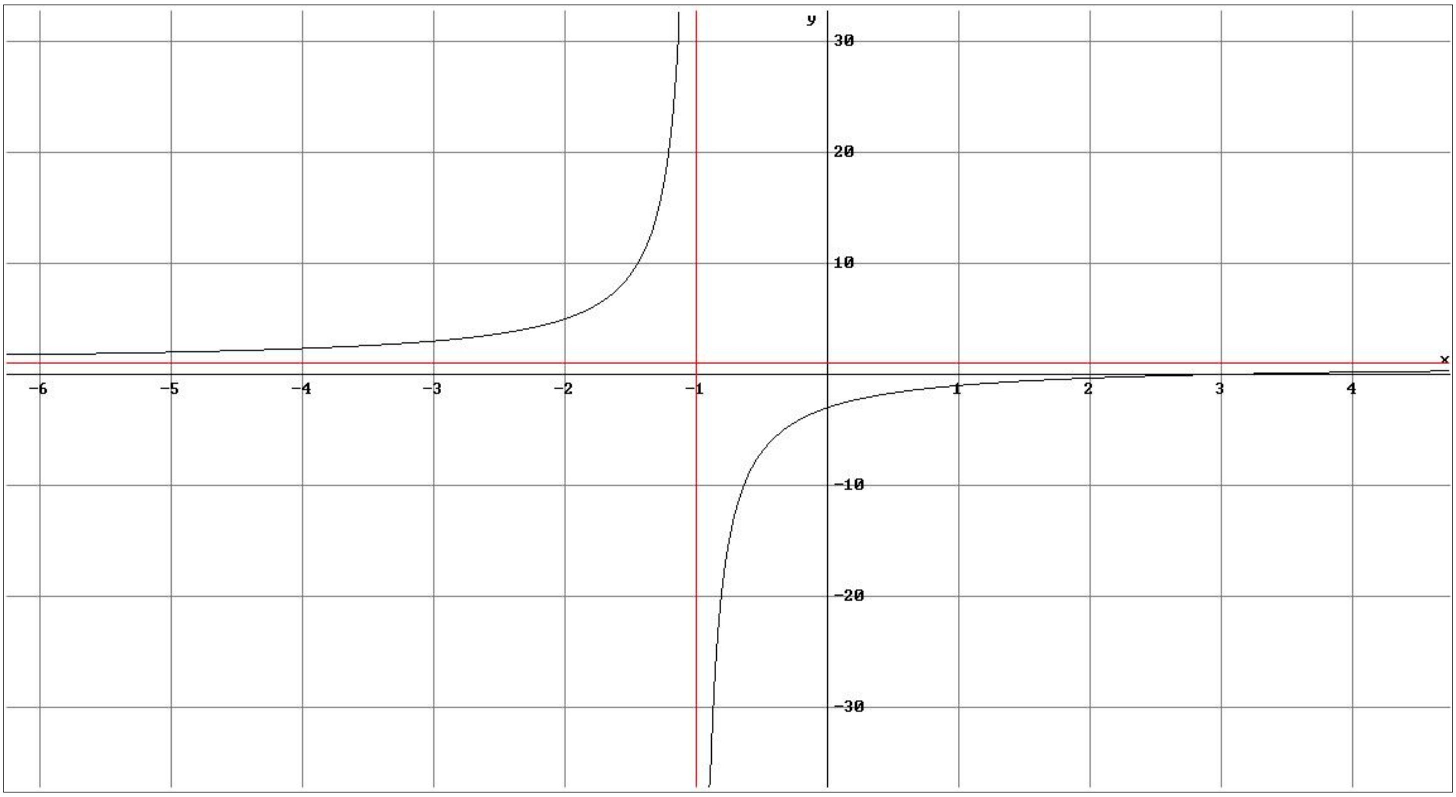
   b) Nenner: ein positiver Wert

   D.h., der Wert des Bruches ist insgesamt negativ (genauer: -399 !)

   $\Rightarrow$ Die Funktion geht nach unten weg, wenn man sich der Asymptote von rechts nähert.

   $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_p\\ x>x_p}} f(x) = -\infty$

Es ergibt sich also folgender Verlauf:



Skizziere die Funktion f(x) = $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 9}$.

Berechne dazu alle (!) Asymptoten, alle Nullstellen und das Verhalten an den Pol-Stellen.