Bestimme eine ganzrationale Funktion 3. Grades mit folgenden Eigenschaften:

a) Der Graph von f verläuft durch den Ursprung.
b) Der Graph verläuft durch P(5|100).
c) Der Graph hat an der Stelle 5 einen Hochpunkt.
d) An der Stelle 2 liegt ein Wendepunkt.

Lösung:

✓

Allg. Funktionsterm: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\Rightarrow$ 4 Unbekannte

$\Rightarrow$ man benötigt zur eindeutigen Lösung 4 Gleichungen

$\Rightarrow$ man benötigt 4 Bedingungen

*Aufstellen der Gleichungen:*

a) $(0|0) \in f$ $\quad\Rightarrow 0 = a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d$ $\quad\Rightarrow \underline{\mathbf{d = 0}}$

b) $(5|100) \in f$ $\quad\Rightarrow 100 = a\cdot 5^3 + b\cdot 5^2 + c\cdot 5$
$\quad = 125a + 25b + 5c$

c) ES bei x=5 $\quad\Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$\quad\Rightarrow 0 = 3a\cdot 5^2 + 2b\cdot 5 + c$ (notw. Bed. für ES)
$\quad = 75a + 10b + c$

d) WS bei x = 2 $\quad\Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$
$\quad\Rightarrow 0 = 6a\cdot 2 + 2b$ (notw. Bed. für WS)

*Gleichungssystem:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | 100 | = | 125a + 25b + 5c |
| II | 0 | = | 75a + 10b + c |
| III | 0 | = | 12a + 2b |

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | 100 | = | 125a + 25b + 5c |
| 5·II = IV | 0 | = | 375a + 50b + 5c |
| III | 0 | = | 12a + 2b |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| IV – I = V | -100 | = | 250a + 25b | \| :25 |
| | -4 | = | 10a + b | |
| III | 0 | = | 12a + 2b | |

2·V – III = VI

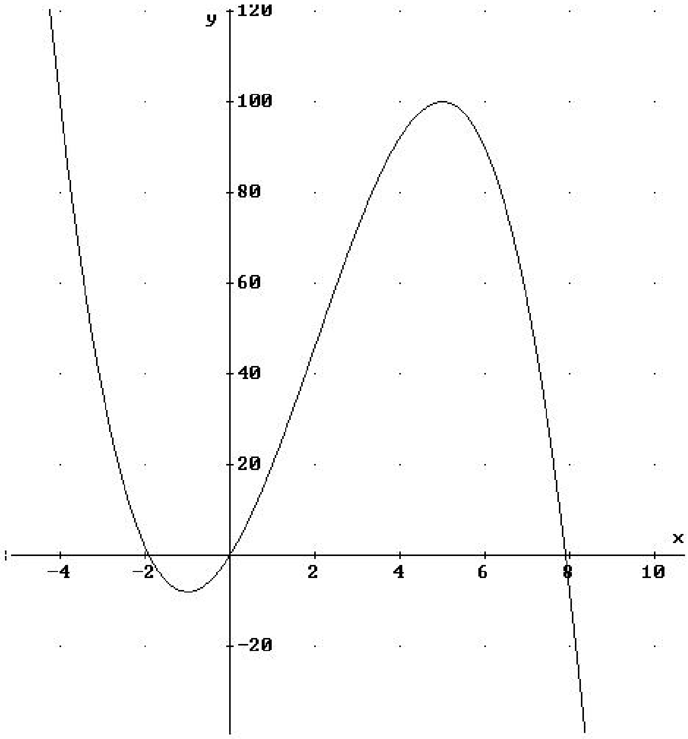
$-8 = 8a$ $\quad\Rightarrow \underline{\mathbf{a = -1}}$

a in III $\quad\Rightarrow 0 = -12 + 2b$ $\quad\Rightarrow \underline{\mathbf{b = 6}}$

a und b in II $\quad\Rightarrow 0 = -75 + 60 + c$ $\quad\Rightarrow \underline{\mathbf{c = 15}}$

Die gesuchte Funktion lautet demnach:

$$\boxed{f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x}$$




Wir merken uns:

„Hochpunkt (Tiefpunkt) bei $x_0$" $\Rightarrow$ allg. 1. Ableitung = 0 und $x_0$ einsetzen

„Wendepunkte bei $x_0$" $\Rightarrow$ allg. 2. Ableitung = 0 und $x_0$einsetzen

Weitere wichtige Formulierungen:

„Die Funktion 4. Grades ist symmetrisch zur y-Achse."

$\Rightarrow$ Die Funktion besitzt nur gerade Exponenten!

$\Rightarrow$ Der allg. Funktionsterm verkürzt sich damit sofort auf: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

*Vergleichbares gilt bei ungeraden Funktionen symmetrisch zum Ursprung.*

„Die Funktion besitzt einen Sattelpunkt bei $x_0$."

$\Rightarrow$ Bei $x_0$ gilt sowohl $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$!

„Die Funktion besitzt bei $x_0$ eine Wendetangente mit der Steigung 5."

$\Rightarrow$ Es gilt $f'(x_0) = 5$ und $f''(x_0) = 0$