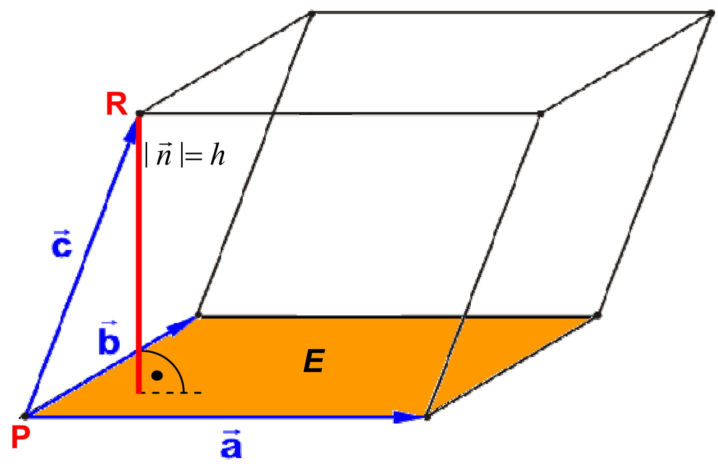
Volumen eines Spats – das Spatprodukt

Es gilt die allg. Volumenformel:



V = G · h

Mit Hilfe des Flächeninhalts eines Parallelogramms erhält man:

$$V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot h$$

h sei die Länge des Normalenvektors $\vec{n}$ auf E. Für den Normaleneinheitsvektor zu E gilt nach dem Vektorprodukt:

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

h beschreibt den Abstand des Punktes R zur Ebene E (mit z.B. $\vec{p}$ als Stützvektor). Daraus folgt:

$$\begin{aligned} h = d(E;R) &= \left|[\vec{r} - \vec{p}] \cdot \vec{n}_0\right| \\ &= \left|[\vec{r} - \vec{p}] \cdot \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}\right| \\ &= \left|\vec{c} \cdot \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}\right| \end{aligned}$$

Damit erhält man zusammenfassend:

$$\begin{aligned} V &= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot h \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \left|\vec{c} \cdot \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}\right| \\ &= \left|\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})\right| \end{aligned}$$

(Spatprodukt)

Zusammenfassung der Formeln zum Vektorprodukt

Vektorprodukt: $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

Flächeninhalt Parallelogramm: $A_P = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Flächeninhalt eines Dreiecks: $A_D = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$

Volumen eines Spats: $V_S = \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\right|$

(Volumen Pyramide folgt später…)

Vom Spatprodukt zur Determinante…

Berechnung des Spatprodukts:

$$\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right| = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$= a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_1$$

Zwecks Übersichtlichkeit werden ab hier die Betragsstriche vernachlässigt

Umgeordnet erhält man:

$$\boxed{a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3}$$

Dieser (für uns noch) unübersichtliche Term steht in der Mathematik für die Berechnung der <u>Determinante</u> einer <u>Matrix</u>.

Eine Matrix ist eine tabellarische Auflistung von Elementen (z.B. Zahlen) in Zeilen und Spalten. So können z.B. Vektoren die Spalten einer Matrix bilden:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Man kann Matrizen leicht mit einander verrechnen. Zudem lassen sich aus einer Matrix viele weitere Eigenschaften berechnen, die z.B. in der linearen Algebra aber auch z.B. der Wirtschaftsmathematik Anwendung finden.

Eine dieser Eigenschaften ist die Determinante (DET) einer Matrix. Sie weist der Matrix eines Skalar (Zahl) zu. Für die Berechnung der Determinante der 3x3-Matrix gilt:

(Allg. Vorschrift:

1. Man beginnt mit den ersten Element der ersten Zeile und multipliziert dieses mit der resultierenden Matrix aus den Einträgen der übrigen Spalte, beginnend mit der zweiten Zeile.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

2. Die einzelnen Produkte werden abwechselnd subtrahiert und addiert.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

3. Anschließend wird in den 2x2-Matritzen über Kreuz multipliziert und subtrahiert (was im Grunde dem Vorgehen bei 1. und 2. entspricht).

$$\mathrm{DET}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \cdot (b_2c_3 - c_2b_3) - b_1 \cdot (a_2c_3 + c_2a_3) + c_1 \cdot (a_2b_3 - b_2a_3)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3$$

Der letzte Term entspricht jedoch dem aufgelösten Spatprodukt.
Folglich ist die Determinante der Matrix, die durch die den Spat definierenden Vektoren erzeugt wird, gleich dem Volumen des Spats.

Wichtige Folgerung: Liegen drei Vektoren in einer Ebene, so besitzt der Spat das Volumen V = 0.

⇒ Sind drei Vektoren linear abhängig, so ist deren Determinante gleich Null !

Im Allgemeinen lässt sich die lineare Abhängigkeit dreier Vektoren mit Hilfe der Determinante schneller bestimmen als mit Hilfe eines LGS ($\vec{a} = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$).

Alternative „Eselsbrücke" zur Determinantenberechnung:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Det}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

Schema:

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{array}$$

Innerhalb Diagonalen multiplizieren, alle Produkte addieren

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{array}$$

Innerhalb Diagonalen multiplizieren, alle Produkte subtrahieren (Klammern!)

$$\boxed{\left|\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{array}}$$

$$\mathrm{Det}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 6 - (7 \cdot 5 \cdot 3) - (1 \cdot 8 \cdot 6) - (4 \cdot 2 \cdot 9) = 0$$