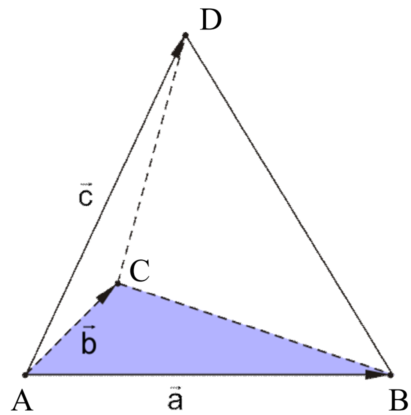
<u>Weitere Anwendungen des Vektorprodukts</u>



Volumen einer Pyramide mit dreieckiger Grundfläche:

Die Pyramide ABCD werde aufgespannt durch die linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

Für das Volumen gilt: $V = \frac{1}{3} G \cdot h$

Es ist: $G = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$

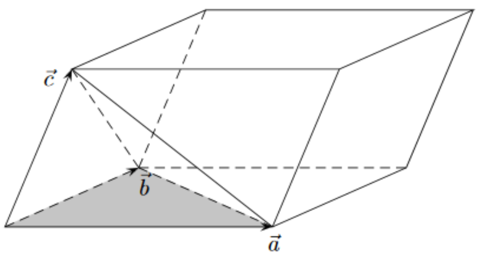
Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} h &= d(D;E_{ABC}) \\ &= |\vec{c} \cdot \vec{n}_0| \qquad \text{(mit o.B.d.A. A(0|0|0))} \\ &= \left|\vec{c} \cdot \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}\right| \qquad \text{(da } \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} \text{)} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} G \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \left|\vec{c} \cdot \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}\right| \\ &= \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| \end{aligned}$$

Somit stellt das Pyramidenvolumen $\frac{1}{6}$ des kompletten Spats dar.



Für eine Pyramide mit vierseitiger Grundfläche (Parallelogramm) folgt: $V = \frac{1}{3} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

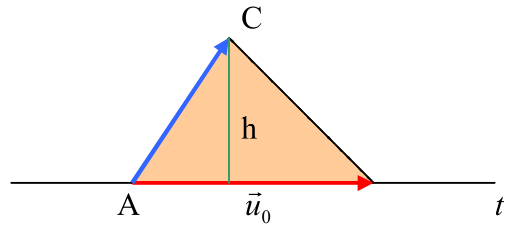
(Der Faktor $\frac{1}{2}$ bei der Grundflächenberechnung fällt weg.)

Abstand Punkt – Gerade:

Gegeben sei eine Gerade t mit dem Richtungsvektor $\vec{u}_0$ (Einheitsvektor) und ein Punkt $C \notin t$ sowie ein Punkt $A \in t$.

Für die Fläche des Δ_{ABC} gilt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC} \times \vec{u}_0|$$



Ebenso gilt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

Es folgt:

$$\frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC} \times \vec{u}_0|$$

$$\frac{1}{2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC} \times \vec{u}_0| \qquad \text{(da } g = |\vec{u}_0| = 1\text{)}$$

$$\frac{1}{2} \cdot d = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC} \times \vec{u}_0| \qquad \text{(da } h = d(C;t)\text{)}$$

$$d = |\overrightarrow{AC} \times \vec{u}_0|$$

$$d = |(\vec{c} - \vec{a}) \times \vec{u}_0|$$

Möchte man auf einen Einheitsvektor verzichten, verwendet man:

$$d = \frac{|(\vec{c} - \vec{a}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Dies ist zur praktischen Berechnung vor allem dann hilfreich, wenn die Länge von $\vec{u}$ nicht ganzzahlig ist.