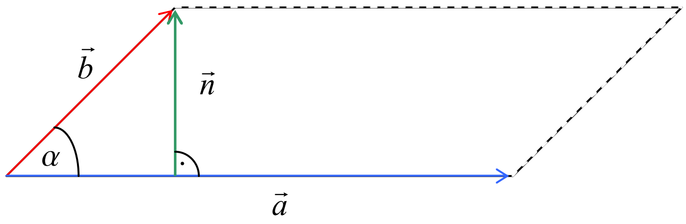
Flächeninhalt eines Parallelogramms

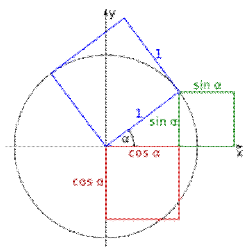
Ein Parallelogramm werde durch die linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt.



Für den Flächeninhalt gilt:

$$A = g \cdot h$$
$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{n}|$$
$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$$

Mit $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ folgt:



$$A = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$
$$= \sqrt{|\vec{a}|^2} \cdot \sqrt{|\vec{b}|^2} \cdot \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$
$$= \sqrt{\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha)^2}$$
$$= \sqrt{\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$
$$= \sqrt{(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2) \cdot (b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2}$$

[…]

$$= \sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}$$
$$= \left| \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \right|$$
$$= |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Somit gilt für den Flächeninhalt des Parallelogramms:

$$\boxed{A_P = |\vec{a} \times \vec{b}|}$$

Damit folgt für den Flächeninhalt eines Dreiecks, erzeugt durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, sofort:

$$\boxed{A_D = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|}$$