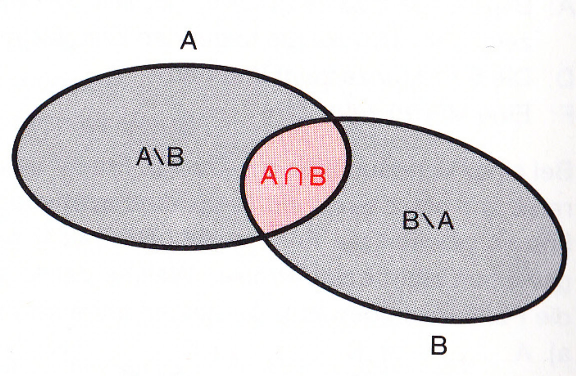
Additionssatz, Multiplikationssatz, Unabhängigkeit und der Satz von Bayes

Der Additionssatz

Sind A und B disjunkte Ereignismengen, so gilt für die Wahrscheinlichkeit der Kombination beider Ereignisse:

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Besitzen die Mengen allerdings einen Schnitt, so gilt:



$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}}$$

Anschaulich kann man dies so erklären: Wenn man einfach P(A) + P(B) rechnet hat man den Schnittbereich doppelt gezählt. Somit muss er einmal wieder abgezogen werden.

Verwendung des Satzes (Beispiel):

Bei der Produktion von Stiften weisen 15% falsche Länge, 10% falsche Dicke und 4% beide Fehler auf. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gezogener Stift mindestens einen der Fehler besitzt?

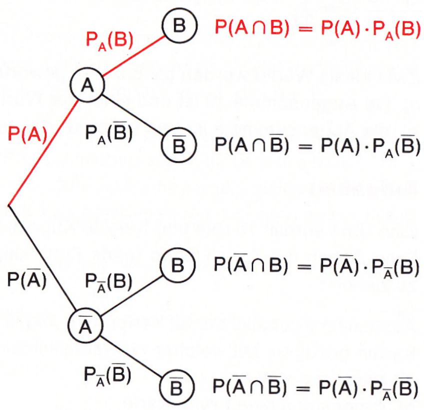
Lösung: A: falsche Länge B: falsche Dicke A∩B: beide Fehler
A∪B: min. einer der Fehler

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0{,}15 + 0{,}1 - 0{,}04 \\ &= 0{,}21 \end{aligned}$$

Ein Stift weist mit einer Wahrscheinlichkeit von 21% mindestens einen Fehler auf.

Der Multiplikationssatz

Gegeben sei ein zweistufiges Zufallsexperiment, wobei in der ersten Stufe das Ereignis A und in der zweiten Stufe das Ereignis B geprüft wird. Die Wahrscheinlichkeit P(A∩B) steht somit für den Weg, der beide Ereignisse enthält. Da B erst nach dem Eintreten von A folgt, verwendet man für die Wahrscheinlichkeit von B auch den Ausdruck $P_A(B)$: „Wahrscheinlichkeit von B gegeben A". Das bedeutet, dass durch die erste Stufe A bereits vorliegt, wenn anschließend B eintritt. Die Wahrscheinlichkeit des gesamten Weges ergibt sich wieder multiplikativ. (s. Bild)



Die sogn. **bedingte Wahrscheinlichkeit** $P_A(B)$ lässt sich demnach auch berechnen gemäß:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Verwendung der Formel (Beispiel):

In einem 100m-Lauf schätzen die Experten die Siegeschancen der Läufer X, Y und Z mit 40%, 30% und 10% ein. Kurz vor dem Start verletzt sich Läufer X, er wird also nicht siegen. Wie groß sind nun die Chancen für Y und Z?

Lösung: Die Siegchancen von Y betrugen 30%, von Z 10% und von allen Sonstigen zusammen 20%.

A: Y, Z oder Sonstige siegen B: Y siegt

Wichtig: B ist hier komplett in A enthalten. Somit ist $P(A \cap B) = P(B)$!

$P_A(B)$ steht für die Wahrscheinlichkeit, dass Y gewinnt, wenn man davon ausgeht, dass Y, Z oder Sonstige gewinnen werden:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = \frac{1}{2}$$

Die Chance für Y liegt jetzt bei 50%.

Unabhängigkeit

Ein Ereignis ist **stochastisch unabhängig**, wenn es nicht von dem Eintritt eines anderen Ereignisses A abhängt. Es gilt dann:

$$\mathbf{P_A(B) = P(B)}$$

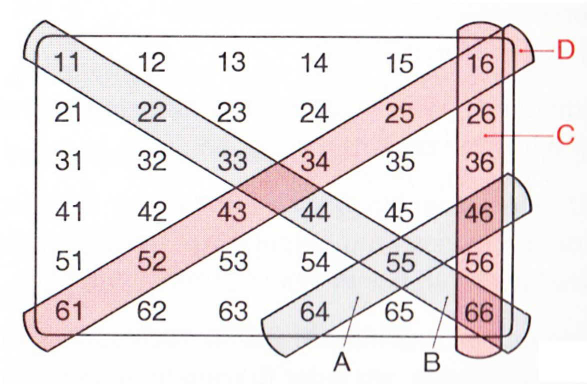
Für die Wahrscheinlichkeit von B ist es irrelevant, ob zuvor A gegeben ist.

Verwendung des Begriffes (Beispiel):

Ein idealer Würfel wird 2-mal geworfen.

a) Man überprüft das Ereignis A: „Augensumme 10“ und das Ereignis B: „Gleiche Augenzahl in beiden Würfen“ auf Abhängigkeit.
b) Man überprüft das Ereignis C: „6 im zweiten Wurf“ und das Ereignis D: „Augensumme 7“ auf Abhängigkeit.

Lösung: Das Bild zeigt alle möglichen 36 Kombinationen.



Zu a): Es ist P(B) = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Ist zuvor jedoch A eingetreten, kommt für B nur noch die Kombination „55“ in Frage, eine von drei Kombinationen bei A $\Longrightarrow P_A(B) = \frac{1}{3}$.

A und B sind somit abhängig.

Zu b): P(D) = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Ist zuvor C eingetreten, kommt für D nur die Kombination „16“ in Frage, einen von sechs Möglichkeiten bei C $\Longrightarrow P_C(D) = \frac{1}{6}$.

Die Ereignisse sind unabhängig.

<u>2. Beispiel:</u> Ein Würfel wird 2-mal geworfen.
A: Zwei gleiche Augenzahlen. B: Die Augensumme ist ungerade.

Lösung: P(B) = $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. $P_A(B) = 0$ (B kann nicht eintreten, wenn A eingetreten ist.) A und B sind abhängig.

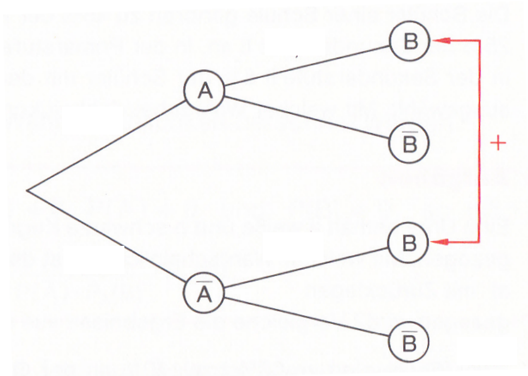
<u>Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit</u>

Wir wissen bereits, dass man für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses alle Wege addieren muss, die zu dem Ereignis führen. Dies kann über bedingte Wahrscheinlichkeiten führen. Somit gilt der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + \ldots + P(A_n) \cdot P_{A_n}(B)$$

Unterscheidet man in der ersten Stufe nur zwischen A und $\overline{A}$, so vereinfacht sich der Satz zu:

$$P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)$$



Der Satz von Bayes

Nach dem Multiplikationssatz gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$

Entsprechend kann man formulieren: $P(B \cap A) = P(B) \cdot P_B(A)$

Da jedoch die Schnitte $A \cap B$ und $B \cap A$ identisch sind und somit auch deren Wahrscheinlichkeiten, lassen sich die Gleichungen Kombinieren zu:

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

Hieraus folgt: $$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)}$$

Man hat somit die Möglichkeit, das Ereignis A unter Vorgabe von Ereignis B auszurechen (vgl. Aids-Test); man geht das Baumdiagramm gewissermaßen rückwärts.

Für P(B) kann man auch die totale Wahrscheinlichkeit formulieren und erhält damit den (vereinfachten) Satz von Bayes:

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)}}$$

Bei Aufgaben, wo der Satz angewendet wird, ist es wichtig, die Wahrscheinlichkeiten für die Formel richtig zuzuordnen.

<u>Verwendung des Satzes (Beispiel):</u>

Eine Lieferung von Glühbirnen stammt zu 60% aus dem Werk W_1 und zu 40% aus dem Werk W_2. 97% der Glühbirnen aus W_1 und 95% der Glühbirnen aus W_2 sind in Ordnung. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt eine defekte Glühbirne aus dem Werk W_1?

Lösung: A: Glühbirne aus W_1 B: Glühbirne defekt

Gesucht ist: $P_B(A)$ (Vorgabe ist „defekt“; gefragt ist nach „W_1“)

Wahrscheinlichkeiten: $P(A) = 0{,}6$ $P_A(B) = 0{,}03$ $P(\overline{A}) = 0{,}4$ $P_{\overline{A}}(B)=0{,}05$

$$\begin{aligned} P_B(A) &= \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)} \\ &= \frac{0{,}6 \cdot 0{,}03}{0{,}6 \cdot 0{,}03 + 0{,}4 \cdot 0{,}05} \\ &\approx 0{,}47 \end{aligned}$$