Eine statistische Ermittlung von π

Die Ausgangssituation:

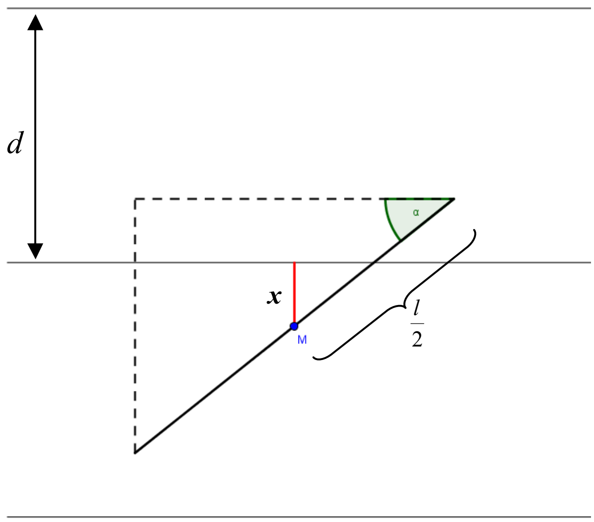
Ein Holzboden besitzt Längsfugen im Abstand von d cm. Eine Nadel der Länge l wird auf den Boden fallen gelassen. Es wird notiert, ob die liegende Nadel eine Längsfuge schneidet. Das Experiment wird (sehr) viele Male wiederholt.

Resultat:

Der Kehrwert der relativen Häufigkeit für einen Schnitt ergibt näherungsweise π !

Die Mathematik hinter dem Experiment:

Die Nadel wird zu einem rechtwinkligen Dreieck ergänzt, wobei die Nadel die Hypotenuse darstellt. x sei der Abstand des Nadelmittelspunkts zur nächstgelegenen Fuge.



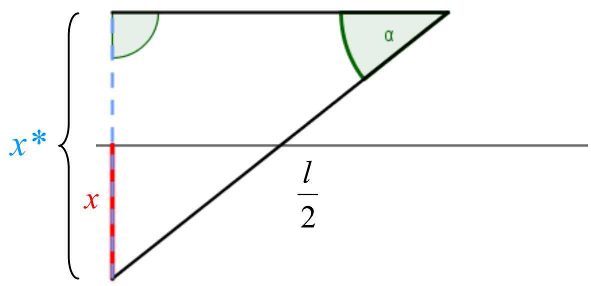
Damit die Nadel eine Fuge schneidet, muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\boxed{x \le \frac{l}{2} \cdot \sin\alpha}$$

Warum ist das so?

Der Ausdruck „$\sin\alpha$“ ist definitionsgemäß der Quotient aus Gegenkathete und Hypotenuse.

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{x^*}{\frac{l}{2}}$$

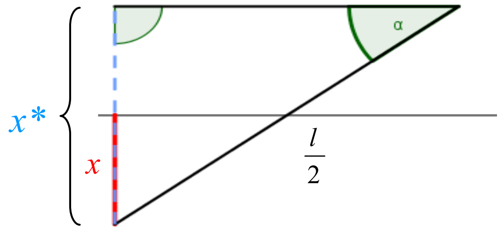


Es ist damit:

$$x \le \frac{l}{2} \cdot \sin\alpha \quad \Rightarrow x \le x^*$$

Fallunterscheidungen zur Verdeutlichung:

1. „normaler Schnitt“ $\Rightarrow$ Bedingung $x \leq x^*$ erfüllt



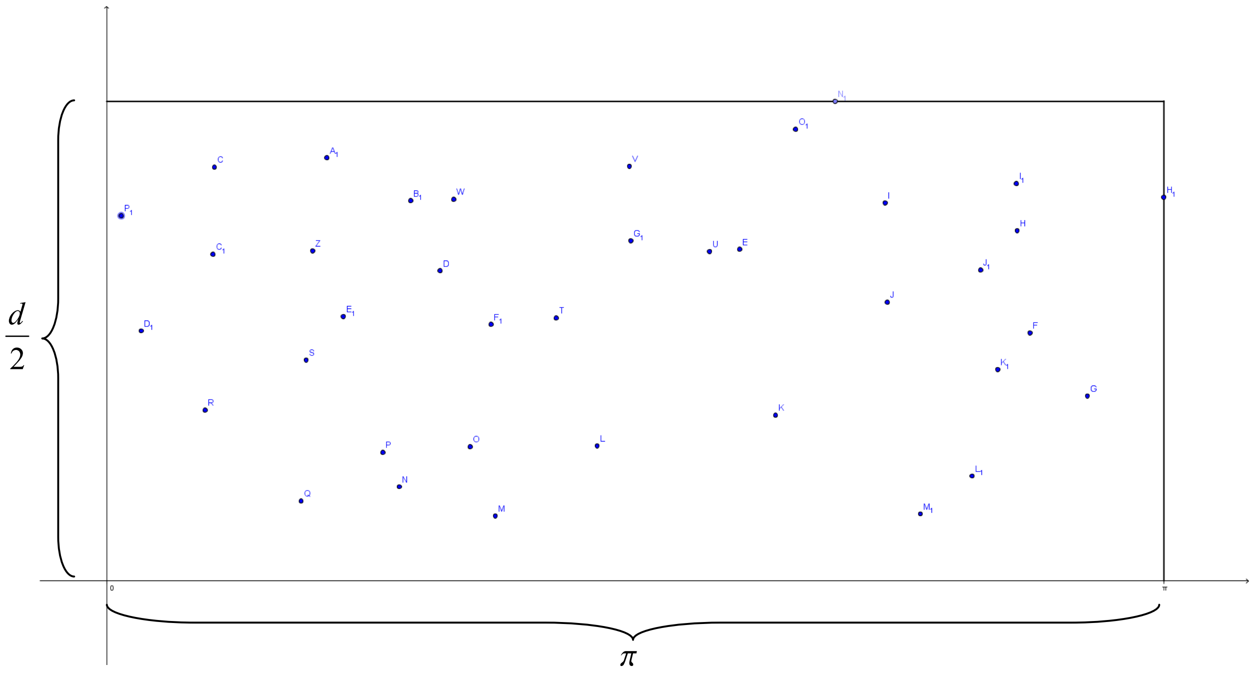
2. Schnitt mit Nadelspitze auf Fuge $\Rightarrow$ Bedingung erfüllt, da $x = x^*$

3. „Schnitt“, Nadel parallel auf Fuge $\Rightarrow$ Bedingung erfüllt, da $x = x^* = 0$

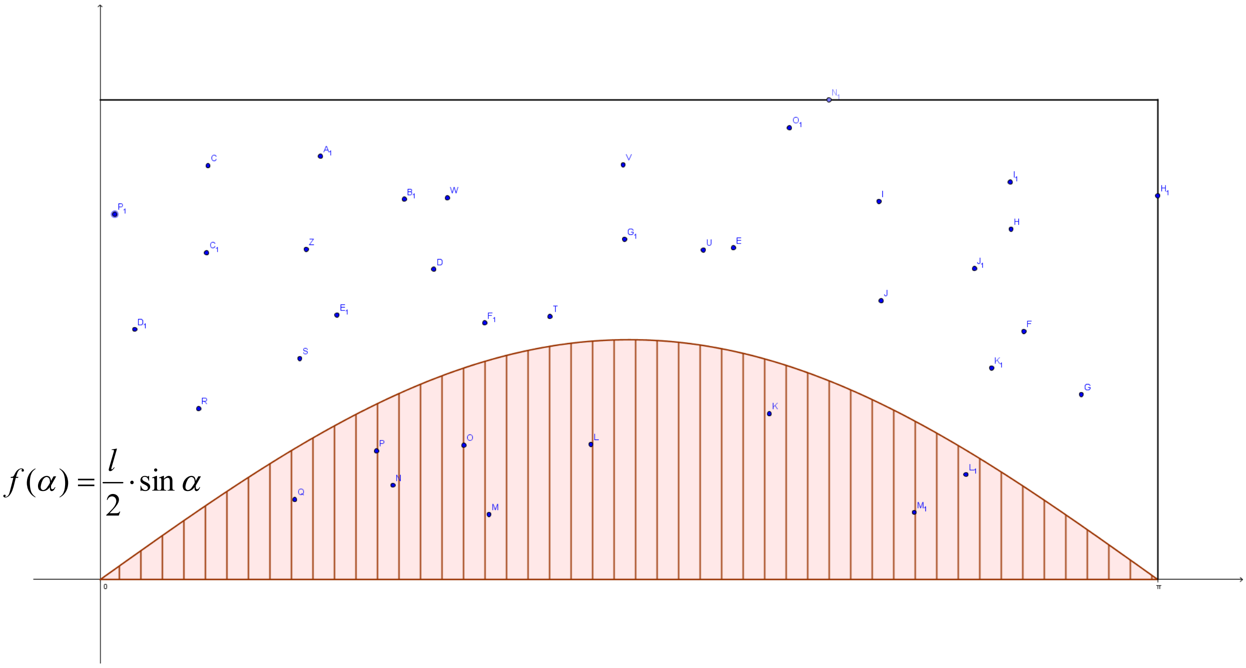
4. Kein Schnitt, nicht parallel $\Rightarrow$ Das Dreieck liegt (z.B.) komplett unter der Fuge $\Rightarrow x > x^*$

5. Kein Schnitt, parallel $\Rightarrow x > x^*$ $(= 0)$

x kann Werte im Intervall $[0;\frac{d}{2}]$ annehmen, α im Bogenmaß Werte im Intervall $[0;\pi]$.
Somit können je nach Lage der Nadel Wertepaare (Punkte) innerhalb eines Rechtecks mit der Breite $\frac{d}{2}$ und der Länge π entstehen.



Für einen Schnitt relevant sind aber nur die Punkte$(\alpha \mid x)$, für die besagte Bedingung $x \le \frac{l}{2} \cdot \sin\alpha$ gilt:



Für die Wahrscheinlichkeit p eines Schnittes muss man die „günstige“ Fläche A_s unter dem Graph durch die Gesamtfläche R (Rechteck) dividieren.

Für die Fläche unter dem Graph gilt:

$$A_s = \int_0^{\pi} \left(\frac{l}{2} \sin\alpha \right) dx = \left[-\frac{l}{2} \cos\alpha \right]_0^{\pi} = \frac{l}{2} - \left(-\frac{l}{2} \right) = l$$

Somit gilt für die Wahrscheinlichkeit:

$$p = \frac{l}{\pi \cdot \frac{d}{2}} = \frac{2l}{\pi d}$$

Wird für die Länge l der Nadel $l = \frac{d}{2}$ gewählt, erhält man:

$$p = \frac{1}{\pi} \qquad \Rightarrow \pi = \frac{1}{p}$$

Nun ist p allerdings unbekannt. Nach dem Gesetz der großen Zahl ist für einen hinreichend großen Stichprobenumfang n die relative Häufigkeit h(n) für einen Schnitt annähernd p.

$$\Rightarrow \pi \approx \frac{1}{h(n)}$$

$\Rightarrow$ Zählt man beim 10000-maligen Werfen der Nadel alle Schnitte mit der Fuge, so kommt man mit der relativen Häufigkeit dem Wert für π relativ nahe. ☺