Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Gesucht sei ein Normalenvektor $\vec{n}$ zu den linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Ansatz:

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3 = 0 \quad | \cdot b_1 \qquad (*)$$

$$\vec{b} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b_1n_1 + b_2n_2 + b_3n_3 = 0 \quad | \cdot (-a_1)$$

$$a_1b_1n_1 + a_2b_1n_2 + a_3b_1n_3 = 0$$
$$-a_1b_1n_1 - a_1b_2n_2 - a_1b_3n_3 = 0$$

$$\boxed{(a_2b_1 - a_1b_2) \cdot n_2 + (a_3b_1 - a_1b_3) \cdot n_3 = 0}$$

Man erhält man einfachsten eine Lösung, wenn man die Faktoren vor n_2 und n_3 vertauscht und bei einem das Vorzeichen ändert:

Wähle: $n_2 = a_3b_1 - a_1b_3$ (**)

@ $n_3 = -(a_2b_1 - a_1b_2)$
$= a_1b_2 - a_2b_1$ (***)

Mit (**) und (***) in (*) erhält man:

$$a_1b_1n_1 + a_2b_1 \cdot (a_3b_1 - a_1b_3) + a_3b_1 \cdot (a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1b_1n_1 + a_2a_3(b_1)^2 - a_1a_2b_1b_3 + a_1a_3b_1b_3 - a_2a_3(b_1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1b_1n_1 = a_1a_2b_1b_3 - a_1a_3b_1b_2$$

$$\Leftrightarrow \quad n_1 = a_2b_3 - a_3b_2$$

$$\boxed{\vec{n} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}}_{\textit{Vektorprodukt (oder: Kreuzprodukt)}} = \vec{a} \times \vec{b} \qquad \text{(lies: „a kreuz b“)}}$$

Rechenhilfe zum Vektorprodukt:

Schreibe die beiden Vektoren zweimal untereinander.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

Rechne nun über Kreuz beginnend mit dem 2. Eintrag. Bilde die jeweilige Differenz.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = -3 \qquad \Longrightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}-3\\ \\ \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 = 6 \qquad \Longrightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}-3\\6\\ \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3 \qquad \Longrightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$