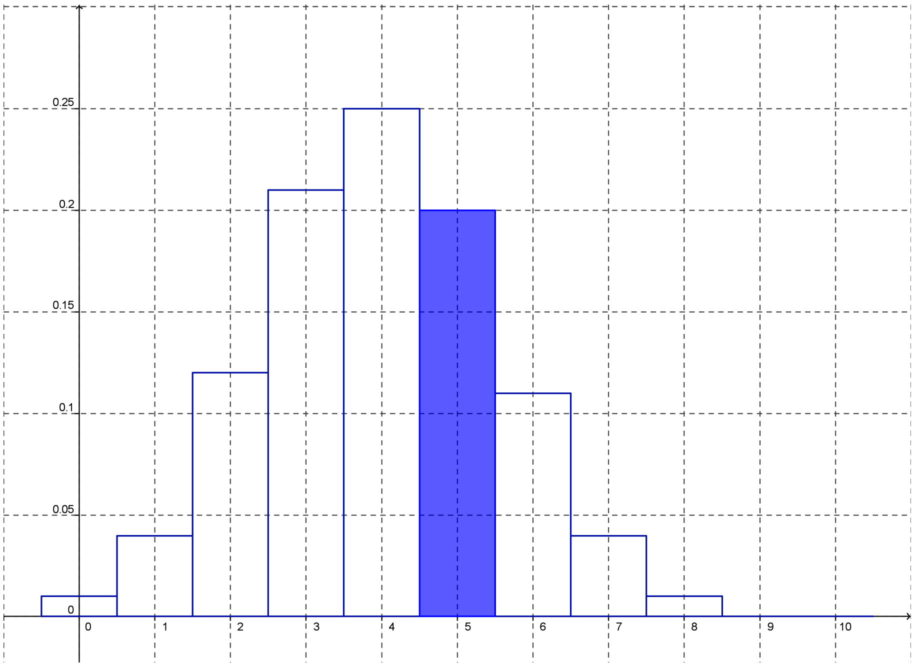
<u>Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten bei der Normalverteilung</u>

Bei der Binomialverteilung besteht ein direkter Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ und der zugehörigen Säule.



Die Säulenbreite beträgt aufgrund $k \in \mathbb{N}_0$ immer 1.

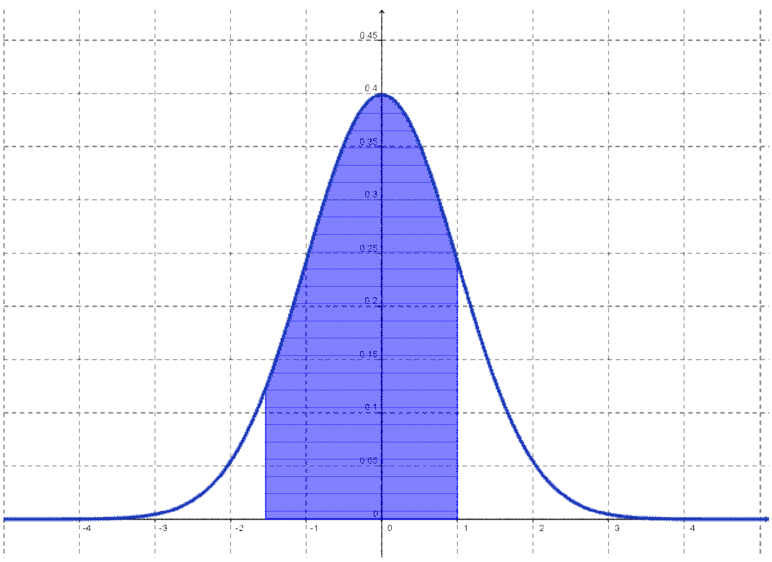
Somit gilt für die Rechtecksfläche: $A = P(X = k) \cdot 1$
$\quad = P(X = k)$

Da die Säule gleichmäßig um k angeordnet ist, gilt für deren Grenzen: $k - 0{,}5$ bzw. $k + 0{,}5$.

Die Verteilung kann nun durch die Glockenkurve angenähert werden:

Da es sich hier um eine Funktion (Name: φ [phi]) handelt, betrachtet man keine Rechtecke mehr sondern ein **<u>Integral</u>**, welches die Fläche unter der Glockenkurve beschreibt!

Es gilt:



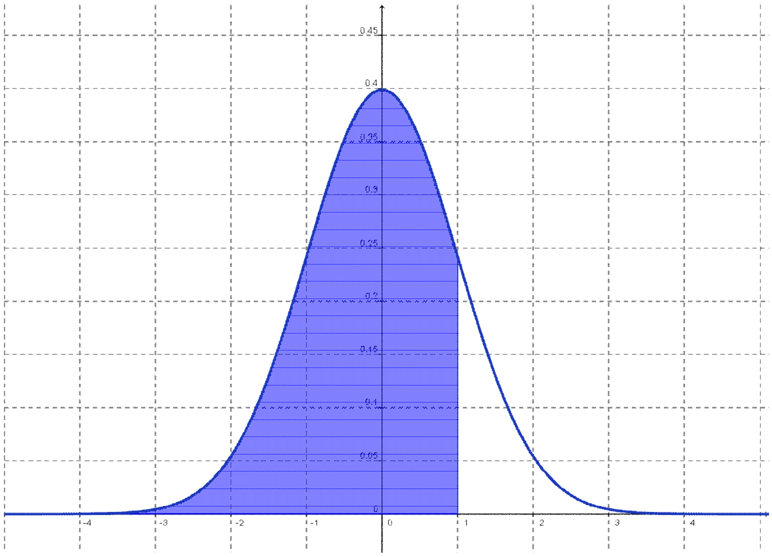
$$P(k_1 \le X \le k_2) \approx \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t)\,dt$$

mit $x_1 =$

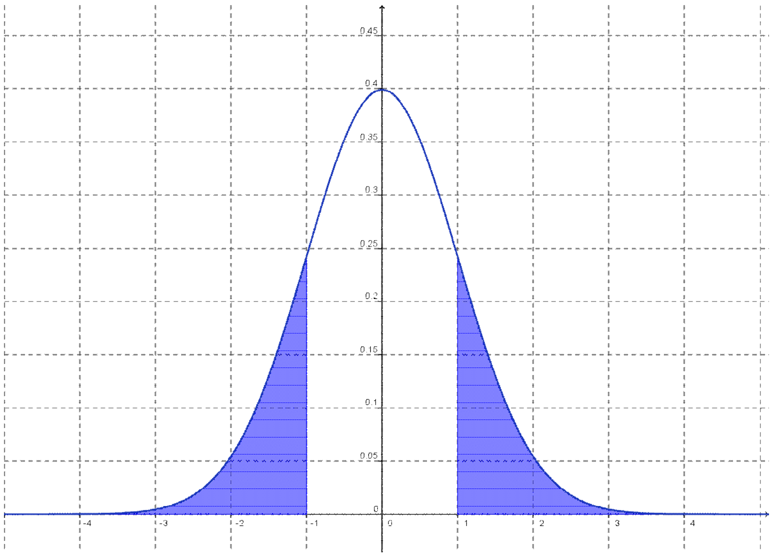
und $x_2 =$

Merke:

$$P(X \leq k) \approx \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$$
$$= \Phi(x)$$



Des weiteren gilt aufgrund der Symmetrie von φ: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$



Die Integralwerte $\Phi(x)$ lassen sich in einer Tabelle ablesen.

Wir haben gesehen, dass die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung umso besser ist, je größer n und damit je größer die Varianz ist.

Als Faustformel gilt: Die Abschätzung mittels Normalverteilung ist akzeptabel, wenn

$$\mathbf{n \cdot p \cdot (1 - p) > 9}$$

In diesem Fall ist n so groß, dass man das Korrekturglied „0,5“ vernachlässigen kann und es gilt:

$$P(X \le k) \approx \Phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Für Intervallwahrscheinlichkeiten gilt:

$$\boxed{\mathbf{P(k_1 \le X \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)}}$$

Beispiel: Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei 500 Bauteilen höchstens 48 defekt sind, wenn die Fehlerwahrscheinlichkeit p = 0,1 beträgt.

Bestätigung der Abschätzung mittels Normalverteilung:

$n \cdot p \cdot (1 - p) = 500 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 45 > 9$!

Berechnung von x:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \qquad \Longrightarrow x = \frac{48 - 500 \cdot 0{,}1}{\sqrt{500 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} \approx -0{,}89$$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit:

$\Phi(-0{,}89) = 0{,}1867$

(Hätte man nicht die Spalte $\Phi(-x)$, müsste man mit dem Zusammenhang $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ rechnen!)

<u>Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten für σ-Intervalle:</u>

$P(|X - \mu| \le \sigma)$ führt zu dem Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$

$$x_1 = \frac{(\mu - \sigma) - \mu}{\sigma} = -1 \qquad\qquad x_2 = \frac{(\mu + \sigma) - \mu}{\sigma} = 1$$

$\Longrightarrow \quad \Phi(1) - \Phi(-1) = 0{,}8423 - 0{,}1587 = 0{,}6826$

$\Longrightarrow \quad \overset{!}{\approx}$ 68,28% aller Werte liegen im 1σ-Intervall und gehören damit zur mittleren Abweichung

Aufgabe: Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für das 2σ- und 3σ-Intervall.

In welchem Intervall liegen 90% aller Werte?

Es gilt: $$\Phi\left(\frac{\mu + c\cdot\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - c\cdot\sigma - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}9$$

$\Longrightarrow \quad \Phi(c) - \Phi(-c) = 0{,}9$

$\Longrightarrow \quad \Phi(c) - (1 - \Phi(c)) = 0{,}9$

$\Longrightarrow \quad 2\Phi(c) - 1 = 0{,}9$

$\Longrightarrow \quad \Phi(c) = 0{,}95$

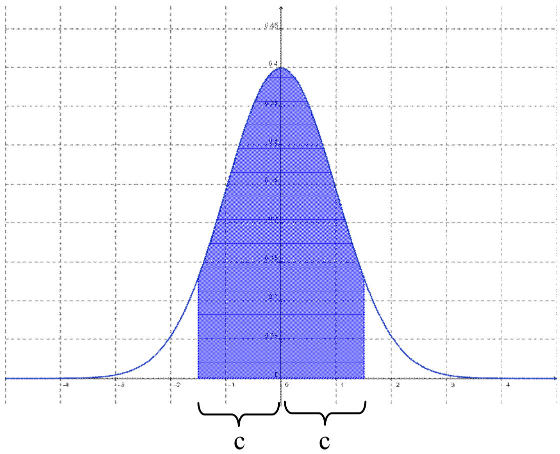
$\Longrightarrow \quad c \approx 1{,}64$ *(mit einer genaueren Rechnung erhält man 1,6449)*

$\Longrightarrow$ 90% aller Werte befinden sich im $1{,}64\sigma$-Intervall.

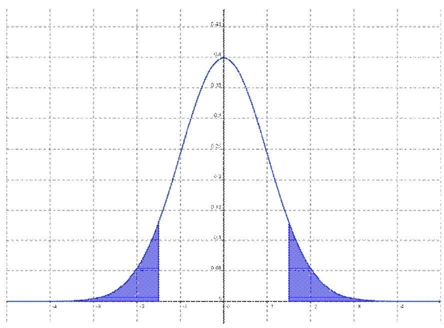
Aufgabe: Bestimme die entsprechenden Intervalle für 95% und 99%.
(bei 99% folgt genauer 2,5758)

Merke:

$$\boxed{P(|X - \mu| \le c) = 2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1}$$



Zeige: $$P(|X - \mu| > c) = 2 \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)\right]$$



Merke: Mit der Normalverteilung lassen sich nicht nur **diskrete** Verteilungen ($k \in \mathbb{N}_0$) für große n sondern auch **stetige** Verteilungen ($k \in \mathbb{R}$) beschreiben!

Es gilt hier: $P(X < x) = P(X \le x)$!

Aber: $P(X > x) = 1 - P(X \le x)$