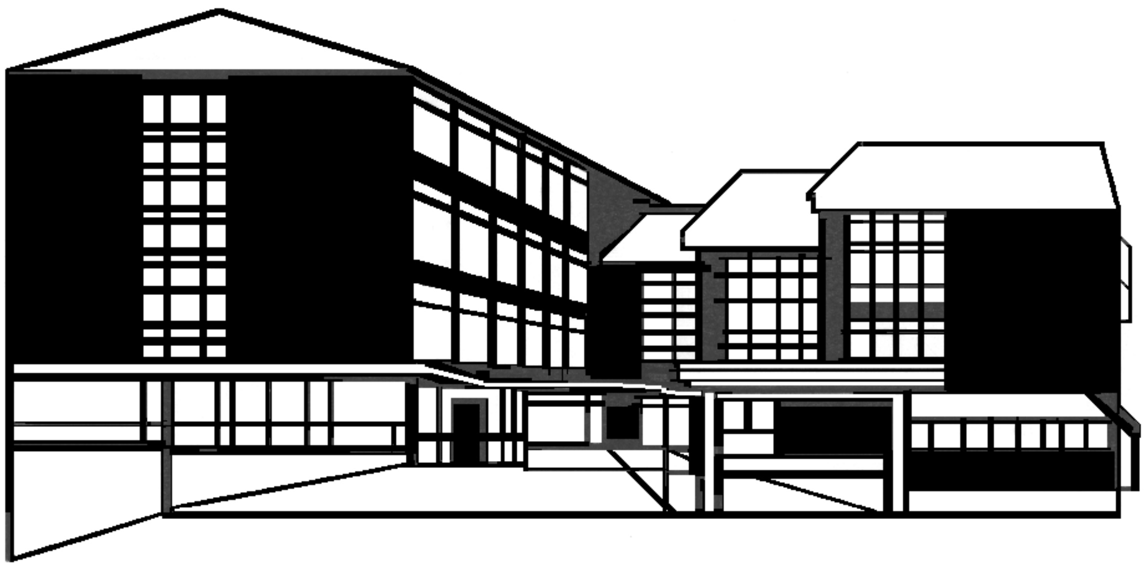
Skriptum für den sog. Crashkurs der Schuljahre ab 2010/11



Erstellt von OStR Winfried Steiner
(mit einigen Aufgaben von Herrn OStD Manfred Weber)

«Crash2010_Version4.doc»

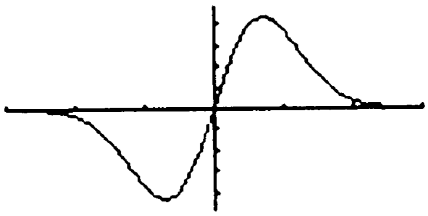
Inhaltsverzeichnis:

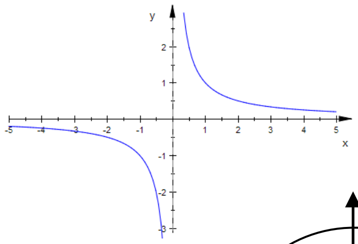
1. Funktion – Relation:

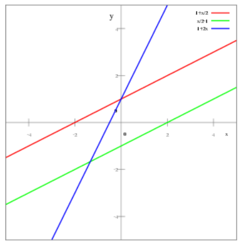
Definition: **Unter Funktion versteht man eine Abbildung, bei der jedem x des Definitionsbereiches genau ein y aus dem Wertebereich zugeordnet wird.**

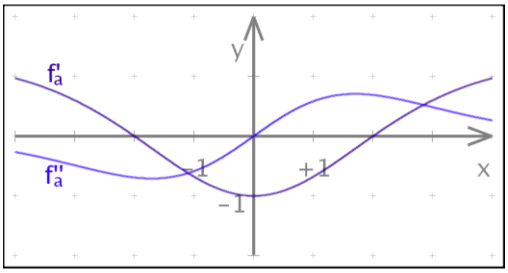
Definition: **Unter Relation versteht man eine Abbildung, bei der jedem x des Definitionsbereiches mindestens ein y aus dem Wertebereich zugeordnet wird.**

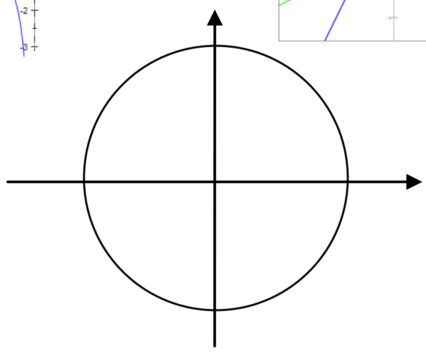
Beispiele:





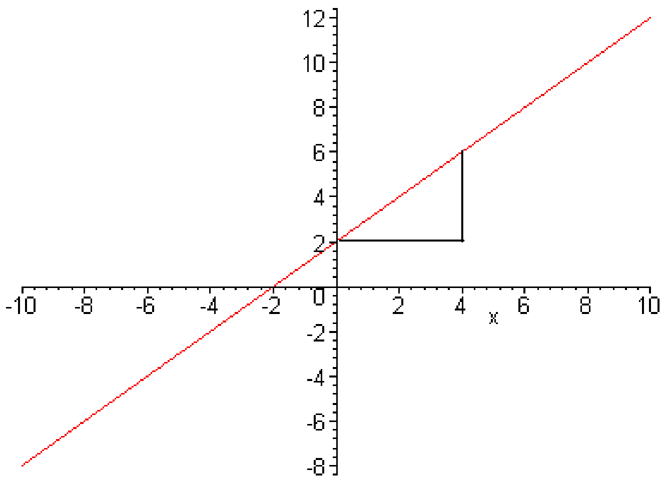






2. lineare Funktion – Die Gerade:

Definition: **Die lineare Funktion besitzt die Funktionsgleichung f(x) = y = mx + b**.
Der Graf einer linearen Funktion ist eine Gerade.

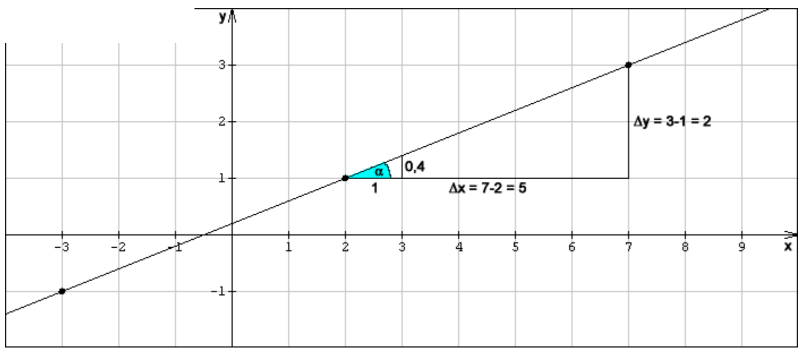


Jede Gerade hat die **Steigung** m und den **y-Achsenabschnitt** b.

Dabei bedeutet y-Achsenabschnitt, dass die Gerade durch den Punkt $S_y(0/b)$ geht.

Die Steigung kann mit m abgelesen werden.

Deshalb hat die Form „**y = mx + b**“ den Namen „**Punkt-Steigungs-Form**“.



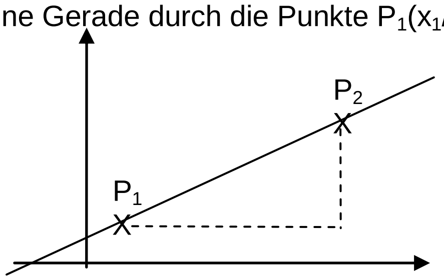
Dabei bedeutet Steigung, wie in der Folgeskizze zu sehen, 5 nach rechts und 2 nach oben, d.h. also, dass die Steigung m den Wert $\frac{2}{5}$ oder 0,4 hat.

Denkt man an «unseren» Westerwald und die vielen Steigungen und Gefällstrecken, so ist das

-Schild nicht ganz unbekannt. Es bedeutet: Auf 100 Metern waagerechter Strecke (entlang der x-Achse) erhöht sich die Fahrbahn um 12 Meter (entlang der y-Achse), also als Bruch: $\frac{12\text{m}}{100\text{m}}$ = 12%.

Angewandt auf die Steigung allgemein heißt dies, dass eine Gerade durch die Punkte $P_1(x_1/y_1)$ und durch $P_2(x_2/y_2)$ folgende Steigung hat:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Wir erstellen nun Geradengleichungen, wenn Punkte gegeben sind.

a) g = AB mit A(0/4) und B(1/2):
Der einfachste Weg ist, sich die Punkte genau <u>anzuschauen</u>!
A ist der y-Achsenschnittpunkt und führt zur 1. Version der Geradengleichung: y = mx + 4 mit b = 4. Nun muss man noch von A zum Punkt B gehen, und dies erreicht man, indem man 1 nach rechts und 2 nach unten geht. Dies aber ist doch genau die Steigungsdefinition mit m = -2. Die Geradengleichung ergibt sich somit zu: g: y = –2x + 4.

Ein weiterer Weg ist, die beiden Punkte in die Steigungsformel einzusetzen und anschließend mit <u>einem der beiden Punkte</u> eine Pp durchzuführen:
Mit $m = \frac{2-4}{1-0} = -2$ wird nun y = mx + b zu y = –2x + b.
Einsetzen von B ergibt: 2 = –2·1 + b, und damit: b = 4.
Die Geradengleichung ergibt sich (auch) zu: g: y = – 2x + 4.

Der ganz anderer Weg ist, die <u>beiden Punkte</u> in einer Punktprobe (Pp) in die ursprüngliche Geradengleichung einzusetzen: y = mx + b.
$A \in g$: I. 4 = 0 + b ➔ b = 4
$B \in g$: II. 2 = 1m + b
Setzt man b aus I. in II. ein, so erhält man: II: 2 = m + 4 ➔ m = – 2
Die Geradengleichung ergibt sich (auch) zu: g: y = – 2x + 4.

b) g = PQ mit P(3/–8) und Q(7/2):
Hier hilft anfangs nur der algebraische Rechenweg der Pp:
$P \in g$: I. –8 = 3m + b
$Q \in g$: II. 2 = 7m + b

Um zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten (hier m und b) zu lösen, gibt es verschiedene Lösungsverfahren:

- **Additionsverfahren**

Man multipliziert die Gleichung(en) so, dass sich das kgV der Vorfaktoren einer Variablen ergibt. Sollten die Vorfaktoren dann gleich, aber mit **verschiedenen** Vorzeichen versehen sein, so sind die Gleichungen zu **addieren**. Um die fehlende Variable zu ermitteln, hat man den gefundenen Variablenwert in eine der beiden Gleichungen einzusetzen.

- **Subtraktionsverfahren**

Man multipliziert die Gleichung(en) so, dass sich das kgV der Vorfaktoren einer Variablen ergibt. Sollten die Vorfaktoren dann gleich, aber mit **gleichem** Vorzeichen versehen sein, so sind die Gleichungen zu **subtrahieren**. Um die fehlende Variable zu ermitteln, hat man den gefundenen Variablenwert in eine der beiden Gleichungen einzusetzen.

- **Einsetzungsverfahren**

Man stellt **eine der Variablen** aus einer der beiden Gleichungen frei und **setzt** diesen Term (*) dann in die andere Gleichung **ein**. Um die fehlende Variable zu ermitteln, hat man den gefundenen Variablenwert in den Term (*) einzusetzen, der zur Lösung bereits anfangs erstellt wurde.

- **Gleichsetzungsverfahren**

Man stellt **die selbe Variable** aus beiden Gleichungen frei und **setzt** diese Terme (*) dann **gleich**. Um die fehlende Variable zu ermitteln, hat man den gefundenen Variablenwert in den Term (*) einzusetzen, der zur Lösung bereits anfangs erstellt wurde.

- **grafisches Verfahren**

Man schreibt die Gleichungen in die Form y = mx + b um und zeichnet die beiden Geraden in ein Koordinatensystem (KO). Leider ist dieses Verfahren recht ungenau und zur Lösung nicht empfohlen.

- Determinantenverfahren (später im LK im Bereich der Vektorrechung)

Zurück zur Aufgabenstellung und Lösung nach einem dieser Verfahren: *Subtraktionsverfahren*

I. $-8 = 3m \mathbf{+ b}$

II. $2 = 7m \mathbf{+ b}$

Beide Gleichungen zeigen ein „+b", Dieses b kann eliminiert werden, indem man beiden Gleichungen subtrahiert:

I. $-8 = 3m + b$ **-** d.h. II. – I. Gleichung

II. $2 = 7m + b$

$$2 - (-8) = 7m - 3m + b - b$$

$$10 = 4m$$

$$2{,}5 = m = \frac{5}{2}$$ (2 nach rechts und 5 nach oben)

Die Variable b wird ermittelt, indem wir den gefundenen Wert in I oder II einsetzen:

I. $-8 = 3 \cdot 2{,}5 + b$

$-8 = 7{,}5 + b$

$-15{,}5 = b$

Die Geradengleichung lautet somit: g: $y = 2{,}5x - 15{,}5$.

Zusatzfragen, ob der Punkt R(4/–5,5) oder der Punkt S(6/0,5) auf der Geraden g liegen, können ganz einfach beantwortet werden, indem man die Pp durchführt:

Pp mit R: $-5{,}5 = 2{,}5 \cdot 4 - 15{,}5$
$-5{,}5 = 10 - 15{,}5$
$-5{,}5 = -5{,}5$ Dies ist eine w(ahre) A(ussage) → $R \in g$

Pp mit S: $0{,}5 = 2{,}5 \cdot 6 - 15{,}5$
$0{,}5 = 15 - 15{,}5$
$0{,}5 = -0{,}5$ Dies ist eine f(alsche) A. → $R \notin g$

c) Die lineare Funktion hat die Funktionsgleichung g: $y = 6x - 3{,}5$.
(i) In welchem Punkt schneidet der Graf die 2. Achse? Oder anders gefragt: Wie heißt der y–Achsenschnittpunkt?
(ii) In welchem Punkt schneidet der Graf die 1. Achse? Oder anders gefragt: Wie heißt die Nullstelle?
(iii) Welche Steigung hat der Graf? Zeichne diese Steigung.
(iv) Geht der Graf durch den Punkt P(2/0)?

zu (i): **Bedingung für y–Achsenschnittpunkte ist:** **x = 0** –->
$y = 6 \cdot 0 - 3{,}5$
$y = -3{,}5$ ➔ $S_y(0/-3{,}5)$

zu (ii): **Bedingung für Nullstellen ist f(x) = y = 0**
$0 = 6 \cdot x - 3{,}5$
$6x = -3{,}5$
$x = -\frac{3{,}5}{6} = \frac{7}{12}$ ➔ $N(\frac{7}{12}/0)$

zu (iii): Die Steigung ist 6 und bedeutet: 1 nach rechts und 6 nach oben.

zu (iv): Wir machen die Pp:
$0 = 6 \cdot 2 - 3{,}5$
$0 = 12 - 3{,}5$
$0 = 8{,}5$ f.A. ➔ $P \notin g$

d) An welcher Stelle nimmt die Funktion f: $y = 2x - 5$ den Wert 1 an?
Das heißt, dass $y = 1$ sein muss. Wir setzen in die Gleichung ein: $1 = 2x - 5$ —> $x = 3$.
Die Stelle heißt $x = 3$, der Punkt also (3/1).

d) Wie heißt die Nullstelle der linearen Funktion h, die durch die Punkte A(1/2) und B(2/4) geht?
$y = mx + b$ mit $m = \frac{2-4}{1-2} = 2$ wird nun zu $y = 2x + b$.
Pp mit A ergibt: $2 = 2 + b$ ➔ $b = 0$.
Die Funktionsgleichung hat folgendes Aussehen: h: $y = 2x$. Dies ist die Form einer Gerade, die durch den Ursprung des Koordinatensystems (KO) geht. Man nennt sie **Ursprungsgerade**. Die Nullstelle ist also dieser Punkt (0/0).

Geraden können sich schneiden, parallel sein oder aufeinander liegen!

Um dies zu zeigen und zu üben, werden die o.a. Verfahren zur Lösung von Gleichungen mit 2 Unbekannten konkret verwendet:

Beispiel 1: ***Subtraktionsverfahren***

I. $3x - 8y = -18 \quad |\cdot 2$
II. $2x + 5y = 19 \quad |\cdot 3$

I. $6x - 16y = -36 \quad | -$
II. $6x + 15y = 57$

$15y + 16y = 57 + 36$
$31y = 93$ --> $y = 3$
I. $3x - 8\ \ 3 = -18$
$3x - 24 = -18$
$3x = 6$
$x = 2$
–> Die Geraden haben einen Schnittpunkt bei S(2/3).

Beispiel 2: ***Additionsverfahren***

I. $3x - 8y = -18 \quad |\cdot 5$
II. $2x + 5y = 19 \quad |\cdot 8$

I. $15x - 40y = -90 \quad | +$
II. $16x + 40y = 152$

$31x = 62$
$x = 2$
I. $3 \cdot 2 - 8y = -18$
$6 - 8y = -18$
$-8y = -18 - 6$
$y = 3$
–> Die Geraden haben einen Schnittpunkt bei S(2/3).

Beispiel 3: ***Einsetzungsverfahren***

I. $3x - 8y = -18 \rightarrow 3x = 8y - 18 \rightarrow \underline{x = 8/3y - 6}$ (*)
II. $2x + 5y = 19$
----
in II. $2 \cdot (8/3y - 6) + 5y = 19$
$16/3y - 12 + 5y = 19$
$16y - 36 + 15y = 57$
$31y = 93 \rightarrow y = 3$
in (*): $x = 8/3 \cdot 3 - 6 = 8 - 6 = 2$--> Die Geraden haben einen Schnittpunkt bei S(2/3).

Beispiel 4: ***Gleichsetzungsverfahren***

I. $3x - 8y = -18 \rightarrow 3x = 8y - 18 \rightarrow \underline{x = 8/3y - 6}$ (*)
II. $2x + 5y = 19 \rightarrow 2x = 19 - 5y \rightarrow \underline{x = 9{,}5 - 2{,}5y}$ (**)

$8/3y - 6 = 9{,}5 - 2{,}5y \quad | \cdot 6$

$16y - 36 = 57 - 15y$

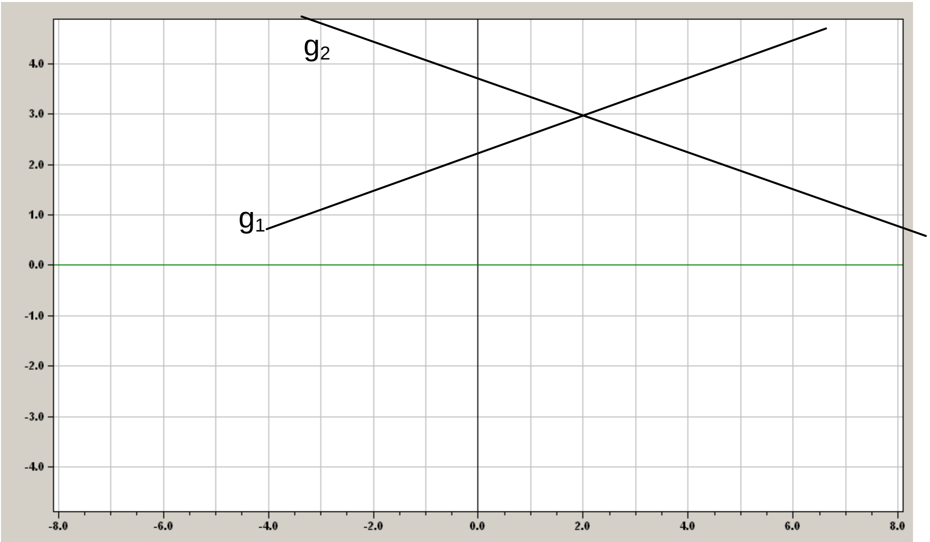
$31y = 93 \rightarrow y = 3$

in (*): $x = 8/3 \cdot 3 - 6 = 8 - 6 = 2$ → Die Geraden haben einen Schnittpunkt bei S(2/3).

Beispiel 5: ***Grafik***

I. $3x - 8y = -18$ → $-8y = -3x - 18$ → $\underline{y = 3/8x + 9/4}$ (*)

II. $2x + 5y = 19$ → $5y = -2x + 19$ → $\underline{y = -2/5x + 19/5}$ (**)



Die Geraden haben einen Schnittpunkt bei S(2/3).

Neben diesem Fall des Schnittpunktes gibt es noch den Fall des Parallelen und des Aufeinanderliegens:

I. $7{,}5x - 12y = 48 \quad | \cdot 2$

II. $8{,}75x - 14y = 56 \quad | \cdot 4$

I. $15x - 24y = 96 \quad | :3$

II. $35x - 56y = 224 \quad | :7$

I. $5x - 8y = 32 \quad |$

II. $5x - 8y = 32 \quad | -$

----

0 = 0 w.A. allgemein gültige Gleichung

—> Es gibt ∞ viele Schnittpunkte, d.h. die **Geraden liegen aufeinander**.

Beweisen kann man dies ganz einfach, indem man die Geradengleichungen vergleicht.

Beide werden zu: $y = \frac{5}{8}x - 4$.

Jetzt fehlt noch die Parallelität:

I. $4y - 3x = 8$

II. $2{,}25x - 3y = 9 \quad | \cdot 4$

I. $-3x + 4y = 8$

II. $9x - 12y = 36 \quad | :3$

I. $-3x + 4y = 8$

II. $3x - 4y = 12 \quad | +$

----

0 = 20 f.A. nicht erfüllbare Gleichung

—> Es gibt gar keine Schnittpunkte, d.h. die **Geraden liegen parallel**.

Beweisen kann man dies ganz einfach, indem man die Geradengleichungen vergleicht.

I. wird zu: $y = \frac{3}{4}x + 2$.

II. wird zu: $y = \frac{3}{4}x - 3$.

Die Steigung ist gleich (Parallelität), der y–Achsenabschnitt aber stimmt nicht überein.

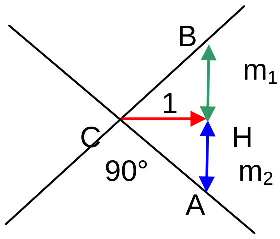
Merke: **Geraden sind genau dann parallel, wenn sie in der Steigung übereinstimmen, jedoch unterschiedlichen y–Achsenabschnitt haben.**

Geraden können aufeinander auch senkrecht stehen!

Wie müssen die Steigungen geartet sein, damit zwei Geraden aufeinander senkrecht stehen? Wann sind sie Orthogonale zueinander?

Ein etwas anderer Beweis!

Es seien g_1: $y = m_1x + b_1$ und g_2: $y = m_2x + b_2$. Ein Bildchen soll diesen Fall deutlicher machen:



Das Dreieck ABC ist rechtwinklig bei C. Die waagerechte Linie durch C ist die Höhe auf die Linie durch A und B. Die Linie von H bis B ist m_1 – im pythagoräischen Dreieck auch Hypotenusenabschnitt genannt zur Kathete BC. Die Linie von H bis A ist m_2 – auch Hypotenusenabschnitt genannt zur Kathete AC.

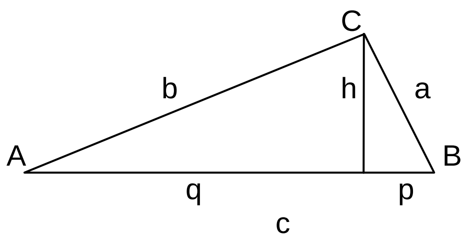
Da im pythagoräischen Dreieck viele Sätze gelten, die **Satzgruppe des Pythagoras** genannt, kann man schnell feststellen, dass bei dieser Konstellation der Höhensatz des Euklid uns „alles“ erklärt:

$h^2 = p \cdot q$ oder jetzt $1^2 = m_1 \cdot m_2$.

Leider ist noch ein Fehler enthalten. Denn $m_1 > 0$, aber $m_2 < 0$. Da die Linien im Höhensatz Strecken sind, also positiv, müssen wir $m_2 < 0$ jetzt positiv machen, indem wir statt $+ m_2$ eben $– m_2$ verwenden. Schließlich ist dann ja $– m_2 > 0$. Damit haben wir:

$1^2 = m_1 \cdot (–m_2)$ oder $1 = – m_1 \cdot m_2$ oder $\boxed{m_1 \cdot m_2 = –1}$

Die Satzgruppe des Pythagoras sei der Vollständigkeit halber genannt: Zu bemerken ist, dass dabei das Bild unbedingt zu den Sätzen gehört!



Pythagoras:	$a^2 + b^2 = c^2$
Kathetensätze:	$a^2 = c \cdot p$
	$b^2 = c \cdot q$
Höhensatz:	$h^2 = p \cdot q$
Flächensatz:	$a \cdot b = c \cdot h$
und ferner gilt:	$c = p + q$

Abschließend bei den Geraden noch hierzu eine kleine Übung:

Welche Gerade h steht auf der gegebenen Geraden g: $y = -\frac{3}{4}x + 3$ senkrecht und geht durch den Punkt Q(3/–2)?

Die Orthogonalitätsbedingung[1] $m_1 \cdot m_2 = -1$ führt zu: $\boxed{m_2 = -\frac{1}{m_1}} = +\frac{4}{3}$.

Also ist die Gerade h so darstellbar: $y = +\frac{4}{3}x + b$.

Die Pp bringt dann: $-2 = +\frac{4}{3} \cdot 3 + b$ —> $-2 = 4 + b$ —> $b = -6$.

Die Gerade h heißt: $y = +\frac{4}{3}x - 6$.

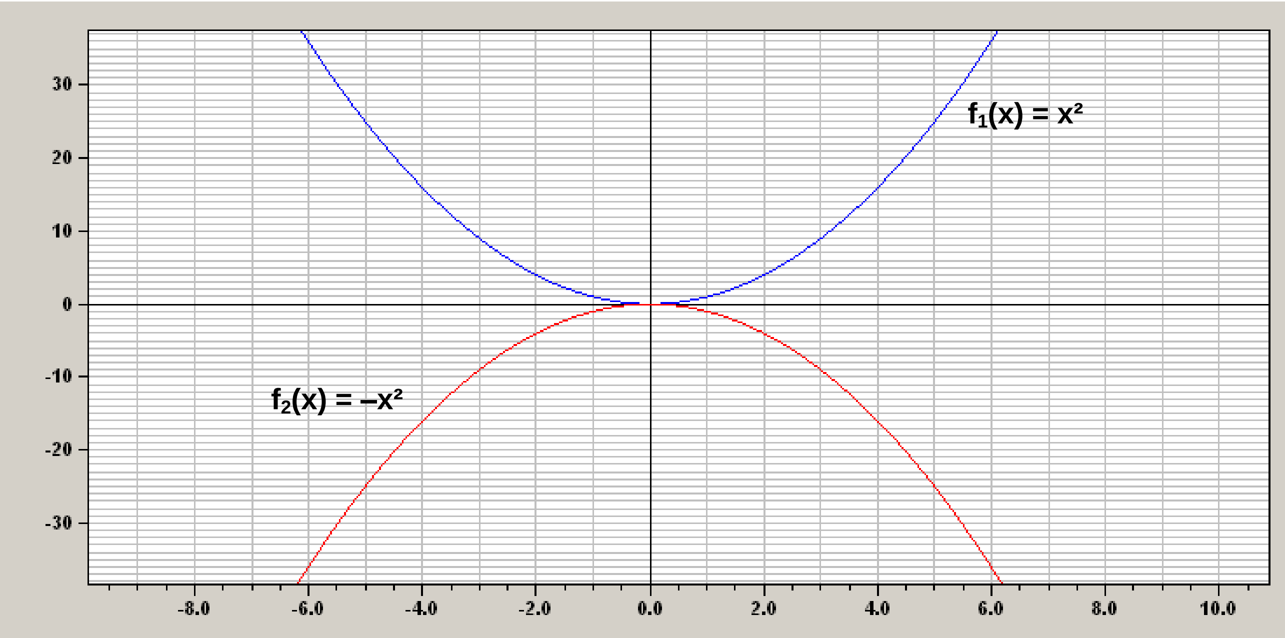
[1] *orthogonal heißt senkrecht / griech. ortho & gonos —> recht/s & Eck*

3. Die quadratische Funktion:

3.1. die rein quadratische Funktion

Diese Funktion ist unter dem Namen **Normalparabel** bekannt. Die Funktionsgleichung ist: $f_1(x) = x^2$. Aber auch $f_2(x) = -x^2$ ist geläufig. In der Wertetabelle und im Grafen sehen sie so aus:

x	0	1	2	3	–1	–2	–3	0,5	–0,5
y_1	0	1	4	9	1	4	9	0,25	0,25
y_2	0	-1	–4	–9	–1	–4	–9	–0,25	–0,25



In beiden Fällen ist der tiefste Punkt der oberen Parabel und der höchste Punkt der unteren Parabel, der **Scheitel**, erhalten geblieben: S(0/0).

3.2. die gestreckte/gestauchte Parabel

Die Funktionsgleichung der Normalparabel wird etwas abgeändert: $f(x) = ax^2$. Dieses a heißt Formvariable und kann eigentlich alle Werte annehmen. Sicher ist dabei klar, dass man den Wert 0 ausschließt. Denn y = 0 ist die x–Achse selbst und damit bestimmt keine Parabel bzw. quadratische Funktion.

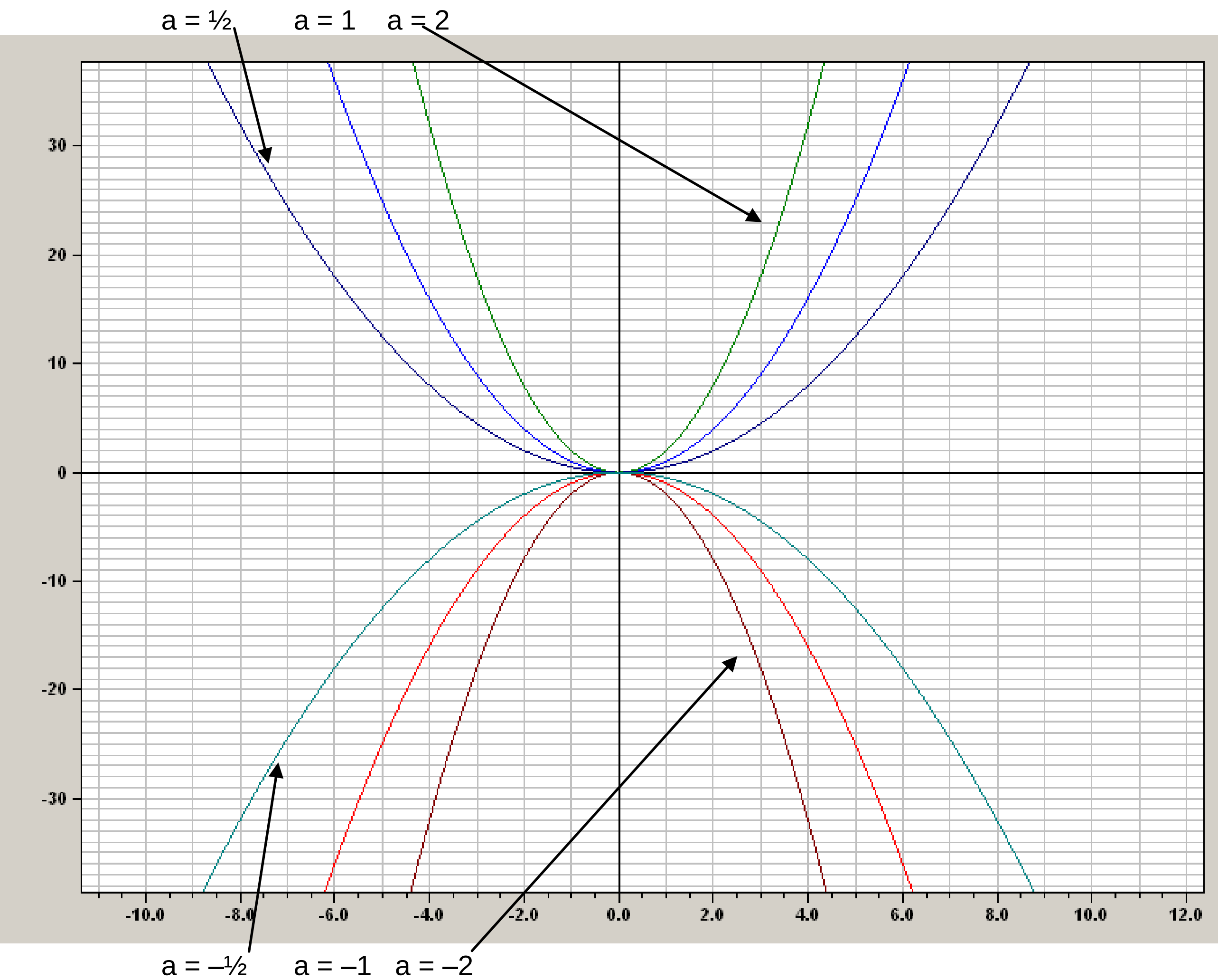
Wir zeichnen einmal die markanten Vertreter dieser Parabel auf:

$f_1(x) = 2x^2$ $\qquad$ $f_3(x) = -2x^2$

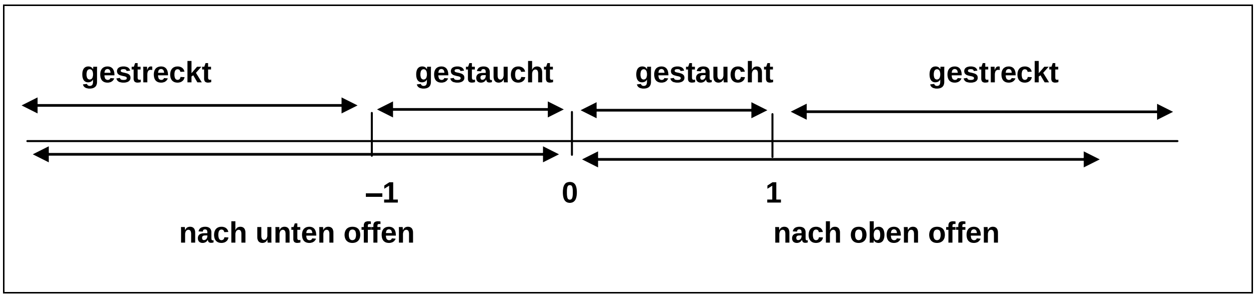
$f_2(x) = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad$ $f_4(x) = -\frac{1}{2}x^2$

Beim Vergleichen mit den Normalparabeln (Np), die „in der Mitte jeweils liegen", bemerkt man, dass man bei den Funktionen $f_1(x)$ und $f_3(x)$ alle einzelnen Funktionswerte (y–Werte) verdoppeln muss. Dieses Strecken ergab den charakterisierenden Begriff der „**gestreckten**" Parabel. So folgerte man, dass bei allen a–Werten, die größer als 1 oder kleiner als –1 sind, diese Eigenschaft vorliegt.

Bei den beiden anderen Funktionen, also $f_2(x)$ und $f_4(x)$ verkürzt man den y–Wert, man staucht ihn (zusammen). Dieses Stauchen ergab den charakterisierenden Begriff der „**gestauchten**“ Parabel. So folgerte man, dass bei allen a–Werten, die positiv und kleiner als 1 oder negativ und größer als –1 sind, diese Eigenschaft vorliegt.



Zusammenfassen kann man sich die Grafik der a–Werte verinnerlichen:



3.3. <u>die längs der y–Achse verschobene Parabel – Nullstellenuntersuchung</u>

Die Funktionsgleichung der Normalparabel wird etwas abgeändert: $f(x) = ax^2 + c$. Dieses c hat die Eigenschaft als konstante[2] Zahl, die Funktion ax^2 um c zu verschieben.
Ist $c > 0$, so wird die Funktion nach oben geschoben, wobei der Scheitel aus (0/0) nunmehr in (0/c) verlagert wird.

[2] *lat. constans, constantis = gleich bleibend, fest*

Ist c < 0, so wird die Funktion nach unten geschoben, wobei der Scheitel aus (0/0) nunmehr ebenfalls in (0/c) verlagert wird.

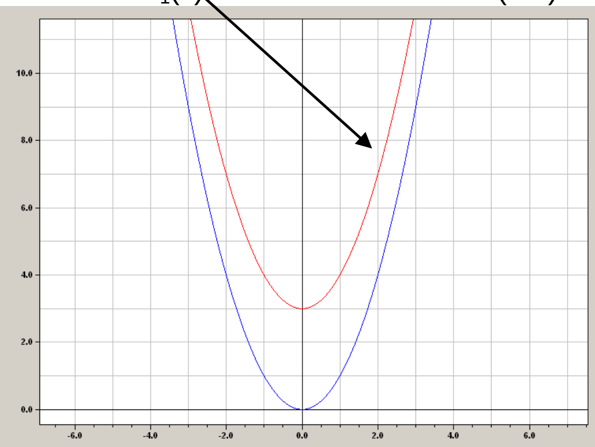
Wir zeichnen einmal die markanten Vertreter dieser Parabel auf:

$f_1(x) = x^2 + 3$ $\qquad$ $f_3(x) = -2x^2 + 18$

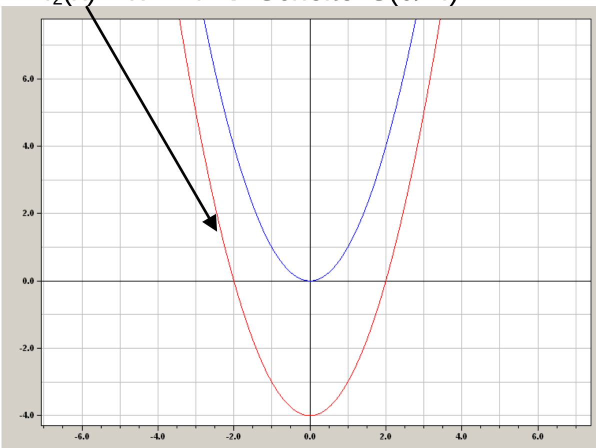
$f_2(x) = x^2 - 4$ $\qquad$ $f_4(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3$

Beim Vergleichen mit den ebenfalls gezeichneten Vertretern x^2 bei den ersten beiden Funktionen und $-2x^2$ bzw. $-0{,}25x^2$ bei den beiden letzten Funktionen, erkennt man das Verschieben sehr gut:

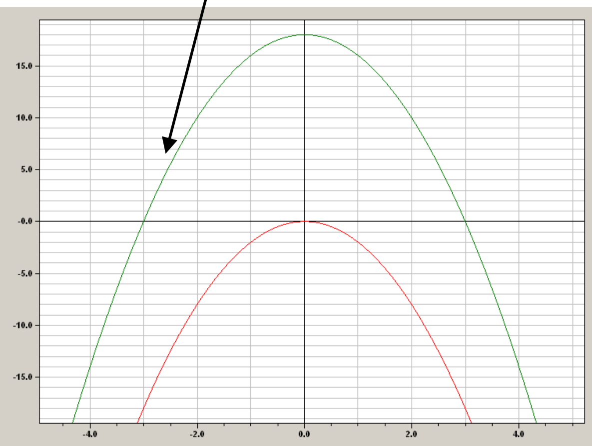
$f_1(x) = x^2 + 3 \rightarrow$ Scheitel S(0/3)



$f_2(x) = x^2 - 4 \rightarrow$ Scheitel S(0/-4)



$f_3(x) = -2x^2 + 18 \rightarrow$ Scheitel S(0/18)



$f_4(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3 \rightarrow$ Scheitel S(0/–3)

Diskussion der einzelnen Funktionen ergibt:

für $f_1(x) = x^2 + 3$

Scheitel S(0/3), nach oben offen, Np, keine Nullstellen, aber **WARUM?**

Bed.: $y = 0 \longrightarrow x^2 + 3 = 0 \longrightarrow x^2 = -3$!!! Kann ein Quadrat einer Zahl negativ werden? Oder können wir aus einer Wurzel mit negativem Wurzelinhalt die Wurzel ziehen? NEIN. Deshalb gibt es keine (reelle) Lösung.

für $f_2(x) = x^2 - 4$

Scheitel S(0/-4), nach oben offen, Np, zwei Nullstellen bei N(±2/0), **WARUM?**

Bed.: $y = 0 \longrightarrow x^2 - 4 = 0 \longrightarrow (x + 2)(x - 2) = 0$ [3. bin. Formel!]

$\longrightarrow x_1 = -2 \,;\, x_2 = +2$

Wie kommt man dazu?

Die Frage, wann ein **Produkt aus zwei Faktoren** (hier die Klammern) **0** ist, kann nur als Antwort haben, **wenn <u>mindestens</u> einer der beiden Faktoren 0** ist.

Dies bedeutet. entweder ist die erste Klammer 0 oder die zweite. Die erste ist 0 für x = –2, die zweite ist 0 für x = +2.

oder auch $x^2 = 4$ wird unter ***Wurzelziehen, bei dem stets an ± zu denken ist***: $x_{1/2} = \pm 2$.

<u>für $f_3(x) = -2x^2 + 18$</u>

Scheitel S(0/18), nach unten offen, gestreckt, zwei Nullstellen bei N(±3/0), **WARUM?**

Bed.: $y = 0 \longrightarrow -2x^2 + 18 = 0 \longrightarrow x^2 - 9 = 0 \longrightarrow (x + 3)(x - 3) = 0$ [3. bin. Formel!]

$\longrightarrow x_1 = -3$; $x_2 = +3$ (siehe oben)

oder auch $x^2 = 9$ wird unter ***Wurzelziehen, bei dem stets an ± zu denken ist***: $x_{1/2} = \pm 3$.

<u>für $f_4(x) = -0{,}5x^2 - 3$</u>

Scheitel S(0/–3), nach unten offen, gestaucht, keine Nullstellen, **WARUM?**

Bed.: $y = 0 \longrightarrow -0{,}5x^2 - 3 = 0 \longrightarrow x^2 = -6$!!! Bemerkung siehe oben!

3.4. <u>die längs der x–Achse verschobene Parabel:</u>

Die Funktionsgleichung der Normalparabel wird etwas abgeändert: $f(x) = a(x - x_S)^2$. Dieses x_S ist die x-Scheitelkoordinate. Die Funktion wurde dabei um x_S verschoben.

Ist $x_S > 0$, so befindet sich der Scheitel auf der positiven x-Achse, ist $x_S < 0$, so auf der negativen Seite der x-Achse.

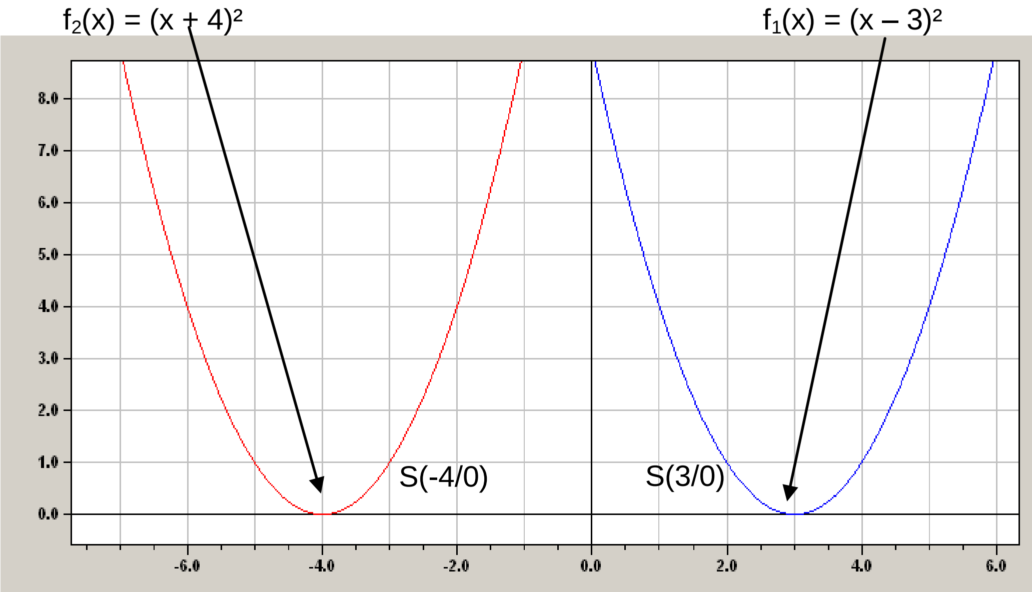
Ist $x_S > 0$, so wird die Funktion nach rechts geschoben, wobei der Scheitel aus (0/0) nunmehr ebenfalls in (x_S /0) verlagert wird.

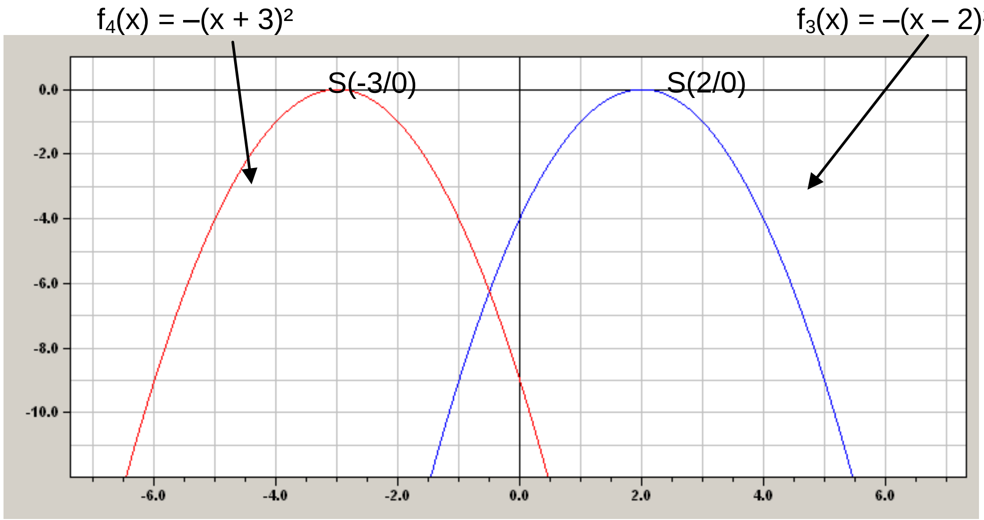
Ist $x_S < 0$, so wird die Funktion nach links geschoben, wobei der Scheitel aus (0/0) nunmehr ebenfalls in (x_S /0) verlagert wird.

Wir zeichnen einmal markante Vertreter dieser Parabel auf:

$f_1(x) = (x - 3)^2$ $f_3(x) = -(x - 2)^2$

$f_2(x) = (x + 4)^2$ $f_4(x) = -(x + 3)^2$





Deutlich erkennt man, dass die Nullstellenberechnung ganz einfach ist:

für z.B. $f_1(x) = (x - 3)^2$ [andere Funktionen analog!]

$(x - 3)^2 = 0$

$x_{1/2} - 3 = \pm 0$

$x_{1/2} = 3 \pm 0$

$x_{1/2} = 3$ ist eine **Doppellösung** und ist nebenbei gleichzeitig x_S!

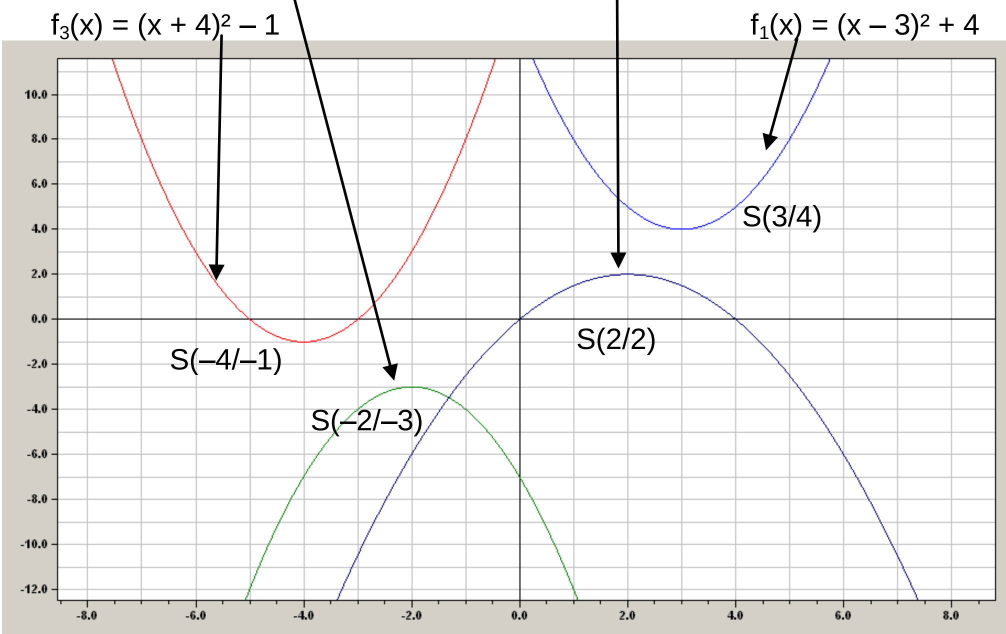
3.5. die allgemeine verschobene Form der Parabel:

Die Funktionsgleichung der Normalparabel wird kombiniert aus der Verschiebung längs der x-Achse und der y-Achse: $f(x) = a(x - x_S)^2 + c$ bzw. $\mathbf{f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S}$. Der Scheitel S ist direkt ablesbar, weshalb man von der **Scheitelform** spricht.

Wir zeichnen einmal Vertreter dieser Parabel auf:

$f_1(x) = (x - 3)^2 + 4$ $f_3(x) = (x + 4)^2 - 1$

$f_2(x) = -(x + 2)^2 - 3$ $f_4(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$



Deutlich erkennt man, dass die Nullstellenberechnung besprochen werden muss:

für $f_1(x) = (x - 3)^2 + 4$

$(x - 3)^2 + 4 = 0$

$(x - 3)^2 = -4$

Das kann nicht sein! Also: $f_1(x)$ hat keine Nullstellen!

für $f_2(x) = -(x + 2)^2 - 3$

$-(x + 2)^2 - 3 = 0$

$-(x + 2)^2 = 3$

$(x + 2)^2 = -3$

Das kann nicht sein! Also: $f_2(x)$ hat keine Nullstellen!

für $f_3(x) = (x + 4)^2 - 1$

$(x + 4)^2 - 1 = 0$

$(x + 4)^2 = 1$

$x_{1/2} + 4 = \pm \sqrt{3}$

$x_{1/2} = -4 \pm \sqrt{3} \rightarrow N_{1/2}(-4 \pm \sqrt{3}/0)$

für $f_4(x) = -1/2\,(x - 2)^2 + 2$

$-1/2\,(x - 2)^2 + 2 = 0$

$-1/2\,(x - 2)^2 = -2 \quad | \cdot (-2)$

$(x - 2)^2 = +4 \quad | \cdot (-2)$

$x_{1/2} - 2 = +- 2$

$x_{1/2} = +2 +- 2 \rightarrow N_1(4/0);\ N_2(0/0)$

Eine wichtige Übung ist es, die folgenden Funktionen zu charakterisieren, zu beschreiben. Führe diese Übung selbständig durch. Die Kontrollergebnisse sind angegeben!

1. $f_1(x) = 2(x - 4)^2 - 8$

   n.o.o. / gestreckt / S(4/-8) / N existieren / $N_1(2/0)$; $N_2(6/0)$

2. $f_2(x) = -1/3(x + 2)^2 + 3$

   n.u.o. / gestaucht / S(-2/+3) / N existieren / $N_1(1/0)$; $N_2(-5/0)$

3. $f_3(x) = 2/3(x + 4)^2 + 4/3$

   n.o.o. / gestaucht / S(-4/ 4/3) / N existieren nicht

4. $f_4(x) = -4(x - 3)^2 - 8$

   n.u.o. / gestreckt / S(3/-8) / N existieren nicht

5. $f_5(x) = (x - 7)^2 - 1$

   n.o.o. / Np / S(7/-1) / N existieren / $N_1(8/0)$; $N_2(6/0)$

3.6. das andere Nullstellenverfahren: p–q–Formel

Gerade haben wir die Funktion $f_5(x) = (x - 7)^2 - 1$ charakterisiert. Man muss sich fragen, ob man nicht auch die Form ohne Klammern verwenden kann, um die Nullstellen auszurechen: $f_5(x) = (x - 7)^2 - 1 = x^2 - 14x + 49 - 1 = x^2 - 14x + 48$.
Dazu verwendet man das **Verfahren der quadratischen Ergänzung**, das auf der Kenntnis der 1. und der 2. binomischen Formel basiert.

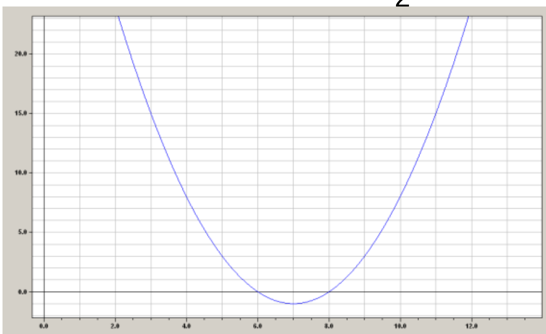
1. bin F.: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. bin F.: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Nun zum Verfahren: $x^2 - 14x + 48 = 0$

$x^2 - 14x = -48$

Ziel ist die bin. F.: $(x - \ldots)^2 = \ldots.$

$x^2 - 14x \mathbf{+ 49} = -48 \mathbf{+ 49}$ Man ergänzt also $7^2 = 49$ bzw. $(\frac{14}{2})^2$



$$(x - 7)^2 = 1$$
$$x_{1/2} - 7 = \pm 1$$
$$x_{1/2} = 7 \pm 1$$
$$x_1 = 8 \text{ und } x_2 = 6$$

—> $N_1(8/0)$; $N_2(6/0)$

Ein weiteres Beispiel: $f(x) = x^2 + 6x + 5 = 0$

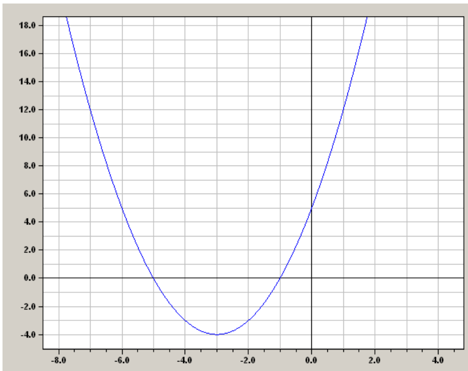
$x^2 + 6x + 5 = 0$

$x^2 + 6x = -5$

Ziel ist die bin. F.: $(x + \ldots)^2 = \ldots.$

$x^2 + 6x \mathbf{+ 9} = -5 \mathbf{+ 9}$

Man ergänzt also $3^2 = 9$ bzw. $(\frac{6}{2})^2$



$$(x + 3)^2 = 4$$
$$x_{1/2} + 3 = \pm 2$$
$$x_{1/2} = -3 \pm 2$$
$$x_1 = -1 \text{ und } x_2 = -5$$

—> $N_1(-1/0)$; $N_2(-5/0)$

Herleitung der allgemeinen p–q–Formel:

Ausgangspunkt ist die Normalgleichung der quadratischen Gleichung: $x^2 + px + q = 0$.

$x^2 + px + q = 0$

$x^2 + px = -q$

Ziel ist die bin. F.: $(x + \ldots)^2 = \ldots.$

$x^2 + px \mathbf{+ (\frac{p}{2})^2} = -q \mathbf{+ (\frac{p}{2})^2}$ Man ergänzt also $(\frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4}$

$$(x + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

$$x_{1/2} + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Die Normalgleichung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat rechnerisch die Lösung: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Dabei nennt man den Radikanden[3] Diskriminante[4] D.

Ist **D =** $\frac{p^2}{4} - q$ **> 0**, dann kann die Wurzel gezogen werden. Wir erhalten **zwei unterschiedliche** reelle **Lösungen**. Ist **D = 0**, dann kann die Wurzel aus 0 zwar gezogen werden. Wir erhalten aber zwei identische reelle Lösungen, die man **Doppellösung** nennt. Ist **D < 0**, dann kann die Wurzel nicht gezogen werden. Wir erhalten **keine reellen Lösungen**.

3.7. Übung in der Anwendung der p–q–Formel:

(a) $x^2 + 8x + 15 = 0$------------------------- Lösungen: $x_1 = -5$ und $x_2 = -3$

(b) $x^2 - 10x + 24 = 0$----------------------- Lösungen: $x_1 = 4$ und $x_2 = 6$

(c) $x^2 - 2x - 15 = 0$------------------------- Lösungen: $x_1 = -3$ und $x_2 = 5$

(d) $x^2 + 3x - 28 = 0$------------------------- Lösungen: $x_1 = 4$ und $x_2 = -7$

(e) $x^2 + 15x + 44 = 0$----------------------- Lösungen: $x_1 = -11$ und $x_2 = -4$

(f) $\frac{1}{2}x^2 - 5x + 12 = 0$---------------------- TIPP: Ist das die *Normalgleichung*???
-- Lösungen: $x_1 = 4$ und $x_2 = 6$

(g) $-3x^2 + 6x + 45 = 0$--------------------- Lösungen: $x_1 = -3$ und $x_2 = 5$

(h) $x^2 - 8x + 16 = 0$------------------------- Lösungen: $x_{1/2} = 4$

(i) $x^2 + 10x + 25 = 0$----------------------- Lösungen: $x_{1/2} = -5$

(j) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = 0$----------------------- Lösungen: $x_{1/2} = 3$

(k) $-\frac{1}{4}x^2 - 3x - 9 = 0$---------------------- Lösungen: $x_{1/2} = -6$

(l) $x^2 - 8x + 17 = 0$------------------------- keine reellen Lösungen

(m) $x^2 + 10x + 29 = 0$----------------------- keine reellen Lösungen

(l) $-2x^2 + 14x - 25 = 0$--------------------- keine reellen Lösungen

---

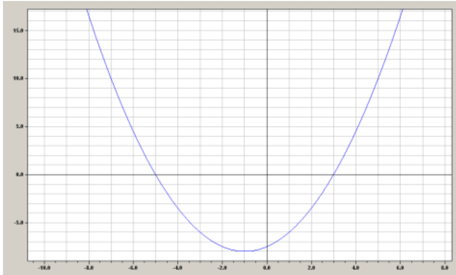
[3] *Radikand: Wert unter der Wurzel, lat. radix, radicis f die Wurzel*
[4] *Diskriminante: zu Unterscheidende; lat. discriminare unterscheiden*

3.8. Übung zur Charakterisierung von Parabeln mit p–q–Formel:

(a) Beschreibe die Parabel mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 7{,}5$

Scheitelform: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 7{,}5$

$$2\,f(x) = x^2 + 2x - 15$$
$$2\,f(x) = x^2 + 2x \mathbf{+ 1^2} - 15 \mathbf{- 1^2}$$
$$2\,f(x) = (x + 1)^2 - 15 - 1$$
$$2\,f(x) = (x + 1)^2 - 16$$
$$f(x) = \frac{1}{2}\,(x + 1)^2 - 8$$

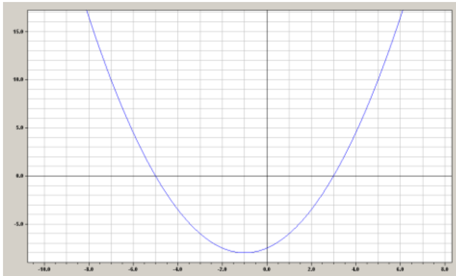


n.o.o. / gestaucht / S(–1/–8) / Nullstellen existieren: $N_1(-5/0)$; $N_2(3/0)$

oder:

p–q–Formel: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 7{,}5$

$$0 = \frac{1}{2}x^2 + x - 7{,}5$$
$$0 = x^2 + 2x - 15$$
$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

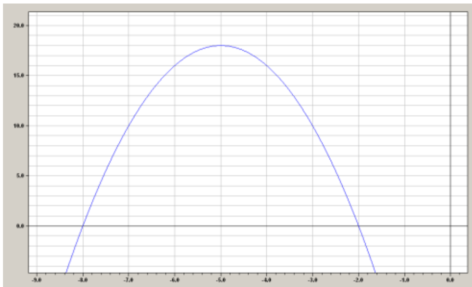


$x_{1/2} = -1 \pm 4$ —> $N_1(-5/0)$; $N_2(3/0)$

(b) Beschreibe die Parabel mit der Gleichung $f(x) = -2x^2 - 20x - 32$

Scheitelform: $f(x) = -2x^2 - 20x - 32$

$$-\frac{1}{2}\,f(x) = x^2 + 10x + 16$$
$$-\frac{1}{2}\,f(x) = x^2 + 10x + 5^2 + 16 - 5^2$$
$$-\frac{1}{2}\,f(x) = (x + 5)^2 - 9$$
$$f(x) = -2(x + 5)^2 + 18$$



n.u.o. / gestreckt / S(–5/18) / Nullstellen existieren: $N_1(-2/0)$; $N_2(-8/0)$

3.9. Nullstellenschreibweise von Parabeln:

Sollte eine Parabel die Nullstellen $N_1(3/0)$ und $N_2(4/0)$ haben, so fragt man sich, welches Aussehen wohl die Funktionsgleichung haben könnte.
Man kommt über die Beantwortung der Frage, welche Lösungen der Term **„$T_1 \cdot T_2 = 0$"** hat zur Lösung dieses Problems. Man setzt nämlich an:

$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$ bzw. $\mathbf{f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2).}$

$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$ bzw. $\mathbf{f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2).}$

Setzt man die gestellte Aufgabe in diese Schreibweise ein, so erhält man

$$f(x) = (x - 3) \cdot (x - 4) = x^2 - 7x + 12.$$

Ob es stimmt, das kann man durch Anwendung der p–q–Formel erkennen:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x_{1/2} = +\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12}$$

$$x_{1/2} = +\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} \longrightarrow N_1(4/0);\ N_2(3/0) \quad ✓$$

Das bedeutet, dass man mit Hilfe dieser Nullstellenschreibweise über die Nullstellen eine andere Funktionsvorschrift ermitteln kann bzw. aus den (evtl. gegebenen) Nullstellen eine Funktionsvorschrift darstellen kann.

Z.B.: Die Gleichung einer Parabel habe die Form $f(x) = x^2 - 6x - 7$. Durch Verwendung der p–q–Formel findet man die Nullstellen $x_{1/2} = +3 \pm 4$, also $\longrightarrow x_1 = 7$ und $x_2 = -1$.
Setzt man dies Werte in die Nullstellenschreibweise $\mathbf{f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)}$ ein, so erhält man:

$$f(x) = (x - 7) \cdot (x + 1).$$

Die Ausmultiplikation der Klammern als Kontrolle zeigt, dass alles richtig ist: $f(x) = x^2 - 6x - 7$. ✓

Z.B.: Die Gleichung einer Parabel habe die Form $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{14}{3}x - \frac{16}{3}$. Durch Verwendung der p–q–Formel findet man die Nullstellen $x_{1/2} = -\frac{7}{2} \pm \frac{9}{2}$, also $\longrightarrow x_1 = 1$ und $x_2 = -8$.
Setzt man dies Werte in die Nullstellenschreibweise $\mathbf{f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)}$ ein, so erhält man:

$$f(x) = \frac{2}{3}(x - 1) \cdot (x + 8).$$

Die Ausmultiplikation als Kontrolle zeigt: $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{14}{3}x - \frac{16}{3}$. ✓

3.10. Zusammenstellung von Übungen zu den Parabeln:

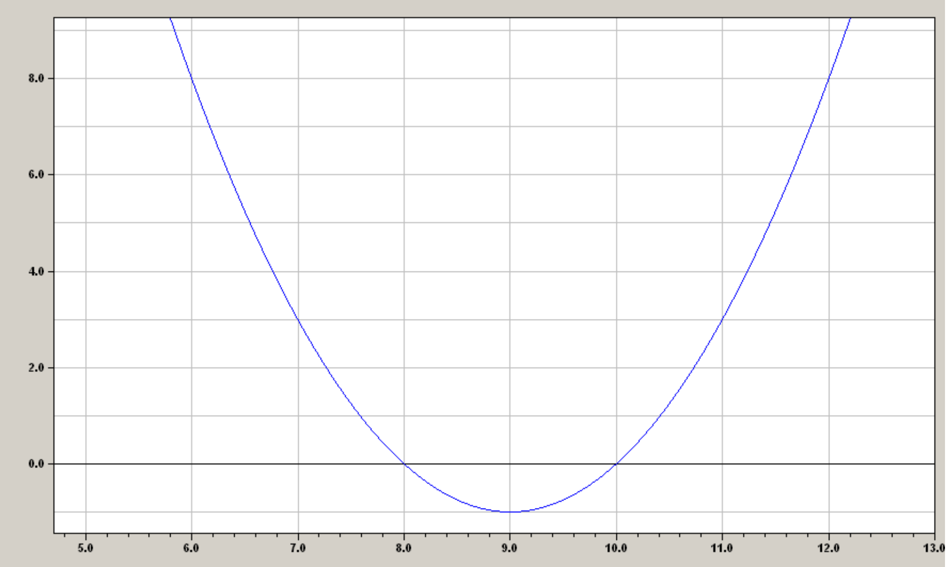
1. An welcher Stelle hat die Parabel f_1: $y = -4x^2 + 56x - 172$
   1.1. den Funktionswert 8?
   1.2. Bestimme die Koordinaten des Scheitelpunktes.

   Lösung:

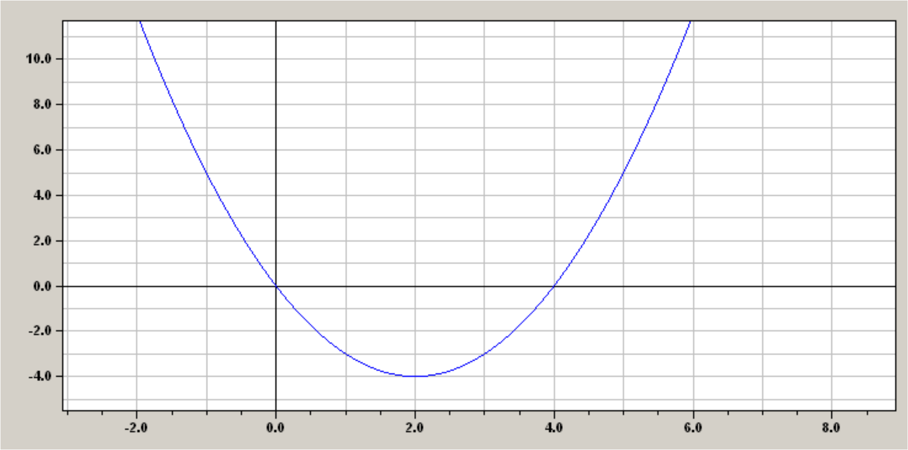
$$-4x^2 + 56x - 172 = 8$$
$$-4x^2 + 56x - 180 = 0$$
$$x^2 - 14x + 45 = 0$$
$$x_{1/2} = +7 \pm 2 \longrightarrow N_1(9/0);\ N_2(5/0)$$

„Ist man ein bisschen weise“, dann bemerkt man, dass die p–q–Formel den x–Wert des Scheitels bereits geliefert hat. Die +7, von der ausgehend einmal 2 addiert wird, um zur rechten Nullstelle zu kommen und 2 subtrahiert wird, um zur linken Nullstelle zu kommen. Also gilt: $x_S = 7$. Einsetzen in die Ausgangsgleichung ergibt:
$y = -4\cdot7^2 + 56\cdot7 - 172 = -4\cdot49 + 392 - 172 = -196 + 220 = 24$ ➔ S(7/24).
Sicher ist es auch möglich, die Scheitelform zu erstellen. Versuche es!

2. In welchem Bereich fällt die Parabel, in welchem steigt sie? f: $y = x^2 - 18x + 80$.
Lösung:
$y = x^2 - 18x + 80$ muss zur Scheitelform gebrachte werden:
$y = x^2 - 18x + 81 + 80 - 81$
$y = (x - 9)^2 - 1 \longrightarrow S(9/-1)$
Daraus folgt, dass die Parabel n.o.o. ist, Nullstellen hat und für $x > 9$ steigt, für $x < 0$ fällt.



3. Von einer verschobenen Np ist bekannt, dass
3.1. S(–2/1) der Scheitel ist.
3.2. an den Stellen –2 und 4 die x–Achse geschnitten wird.
3.3. die Gerade $x = 2$ Symmetrieachse der Np ist, die Np durch den Ursprung geht.
Wie lauten die Parabelgleichungen?
Lösung:
zu 3.1.: Scheitelform: $y = (x + 2)^2 + 1 \longrightarrow x^2 + 4x + 5$
zu 3.2.: Nullstellenschreibweise: $y = (x + 2)(x - 4) \longrightarrow y = x^2 - 2x - 8$
zu 3.3.: Wenn $x = 2$ Symmetrieachse ist, dann ist die x–Koordinate des Scheitels ebenfalls 2. Die zu $x = 0$ symmetrische Nullstelle ist $x = 4$. Mit diesen beiden Nullstellen ergibt sich: $y = (x - 4)(x \pm 0) \longrightarrow y = x^2 - 4x$. Die Scheitelform wäre dann: $y = (x - 2)^2 - 4$.



4. Gegeben ist die Parabel $x \longrightarrow x^2 - 3x - 1{,}75$.
   - 4.1. Bestimme den Scheitel S der Parabel.
   - 4.2. Ist der Scheitel ein Hoch– oder ein Tiefpunkt?

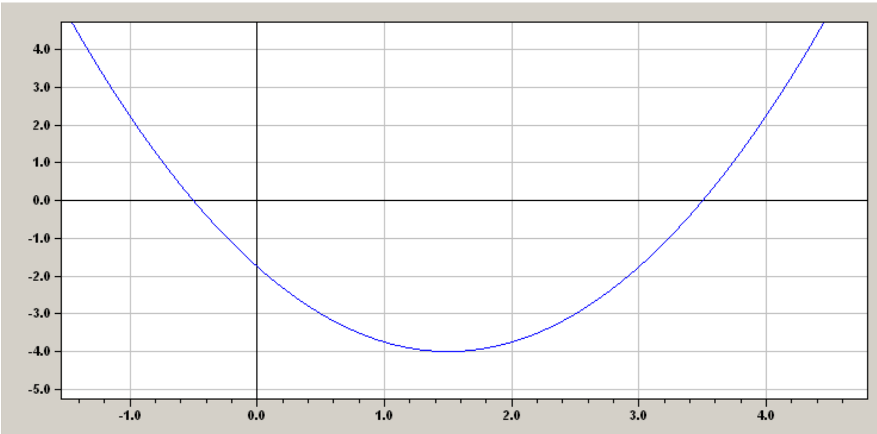
Lösung:

zu 4.1.: Scheitelform: $x^2 - 3x - 1{,}75 = 0 \longrightarrow x_{1/2} = +\frac{3}{2} \pm \ldots \longrightarrow x_S = 1{,}5$

eingesetzt in $y = x^2 - 3x - 1{,}75 = 1{,}5^2 - 3 \cdot 1{,}5 - 1{,}75 = 2{,}25 - 4{,}5 - 1{,}75 = -4$

der Scheitel ist S(1,5/4).

zu 4.2.: Np ist n.o.o. —> Der Scheitel ist ein Tiefpunkt.



5. Gegeben ist die Parabel $x \longrightarrow -\frac{4}{3}x^2 - 4x + 1$.
   - 5.1. Bestimme den Scheitel S der Parabel.
   - 5.2. Ist der Scheitel ein Hoch– oder ein Tiefpunkt?

Lösung:

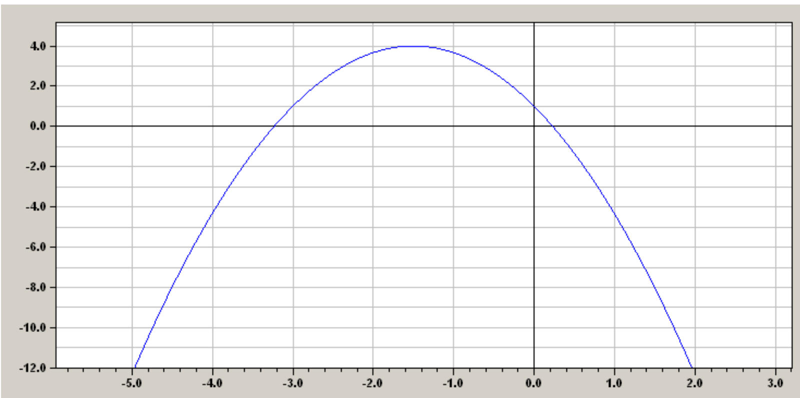
zu 5.1.: Scheitelform: $-\frac{4}{3}x^2 - 4x + 1 = 0 \;\Big|\; \cdot 3 : (-4)$

$$x^2 + 3x - \frac{3}{4} = 0 \longrightarrow x_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \ldots \longrightarrow x_S = -1{,}5$$

eingesetzt in $-\frac{4}{3}x^2 - 4x + 1 = -\frac{4}{3}(-1{,}5)^2 - 4(-1{,}5) + 1 = -3 + 6 + 1 = +4$

der Scheitel ist S(–1,5/4).

zu 5.2.: Np ist n.u.o. —> Der Scheitel ist ein Hochpunkt.



6. Gegeben ist die Parabel x —>$x^2 + 2x - 8$.
   6.1. Bestimme die Nullstellen der Parabel.
   6.2. Ermittle Lage und Art des Scheitels S.
   6.3. Welcher Punkt Q der Parabel liegt auf der y–Achse?
   6.4. Welcher Punkt R der Parabel hat die gleiche y–Koordinate wie Q?
   6.5. An welchen Stellen x wird der Funktionswert 4 angenommen?

Lösung:

zu 6.1.: $x^2 + 2x - 8 = 0$ —> $x_{1/2} = -1 \pm 3$ —> $N_1(2/0)$; $N_2(-4/0)$

zu 6.2.: $x_S = -1$ —> $y = (-1)^2 + 2(-1) - 8 = 1 - 2 - 8 = -9$ —> S(–1/–9)

Np n.o.o. → S ist Tiefpunkt.

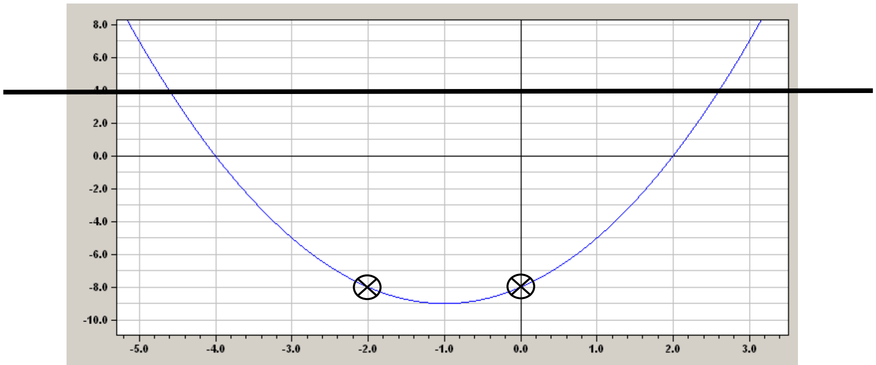
zu 6.3.: Bed.: x = 0 —> y = 0 + 0 – 8 = –8 —> $S_y(0/-8)$

zu 6.4.: Vorgabe aus 6.3.: y = –8 —> $-8 = x^2 + 2x - 8$ —> $x^2 + 2x = 0$ —> $x(x + 2) = 0$

$x_1 = 0$ (Das ist Q!) und $x_2 = -2$ —> R(–2/–8)

zu 6.5.: Bed.: y = 4 —> $4 = x^2 + 2x - 8$ —> $x^2 + 2x - 12 = 0$ —> $x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+12}$

—> $x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{13}$ [nicht verlangt sind die Punkte: $T_{1/2}(-1 \pm \sqrt{13}\,/4)$]



7. Gegeben ist die Parabel x —>$\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x - 3$.
   7.1. Bestimme die Nullstellen der Parabel.
   7.2. Ermittle Lage und Art des Scheitels S.
   7.3. Welcher Punkt Q der Parabel liegt auf der y–Achse?
   7.4. Welcher Punkt R der Parabel hat die gleiche y–Koordinate wie Q?
   7.5. An welchen Stellen x wird der Funktionswert 4 angenommen?

Lösung:

zu 7.1.: $\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x - 3 = 0$ —> $x^2 + 6x - 27 = 0$ —> $x_{1/2} = -3 \pm 6$ —> $N_1(3/0)$; $N_2(-9/0)$

zu 7.2.: $x_S = -3$ —> $y = \frac{1}{9}(-3)^2 + \frac{2}{3}(-3) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$ —> S(–3/–4)

Np n.o.o. → S ist Tiefpunkt.

zu 7.3.: Bed.: x = 0 —> $y = \frac{1}{9}0^2 + \frac{2}{3}0 - 3 = -3$ —> $S_y(0/-3)$

zu 7.4.: Vorgabe aus 7.3.: y = –3 —> $-3 = \frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x - 3$ —> $\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x = 0$

—>$x^2 + 6x = 0$ —> $x(x + 6) = 0$ —> $x_1 = 0$ (Das ist Q!) und $x_2 = -6$ —> R(–6/–3)

zu 7.5.: Bed.: y = 4 —> $4 = \frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x - 3$—> $\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x - 7 = 0$ —> $x^2 + 6x - 63 = 0$

—> $x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9+63}$

—> $x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{72}$ [nicht verlangt sind die Punkte: $T_{1/2}(-3 \pm \sqrt{72}/4)$]

—> $x_{1/2} = -3 \pm 6\sqrt{2}$ [nicht verlangt sind die Punkte: $T_{1/2}(-3 \pm 6\sqrt{2}/4)$]

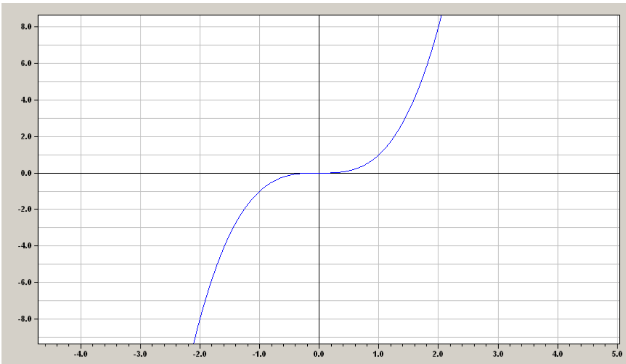
4. Die kubische[5] Funktion:

4.1. die rein kubische Funktion

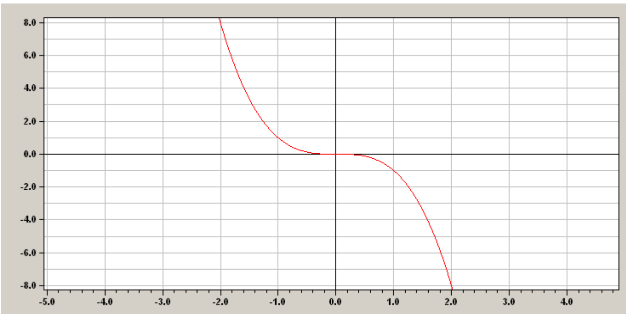
Die Funktionsgleichung ist: $f_1(x) = x^3$. Aber auch $f_2(x) = -x^3$ ist geläufig. In der Wertetabelle und im Grafen sehen sie so aus:

x	0	1	2	3	–1	–2	–3	0,5	–0,5
y_1	0	1	8	27	–1	–8	–27	0,125	–0,125
y_2	0	-1	–8	–27	1	8	27	–0,125	0,125

$f_1(x) = x^3$



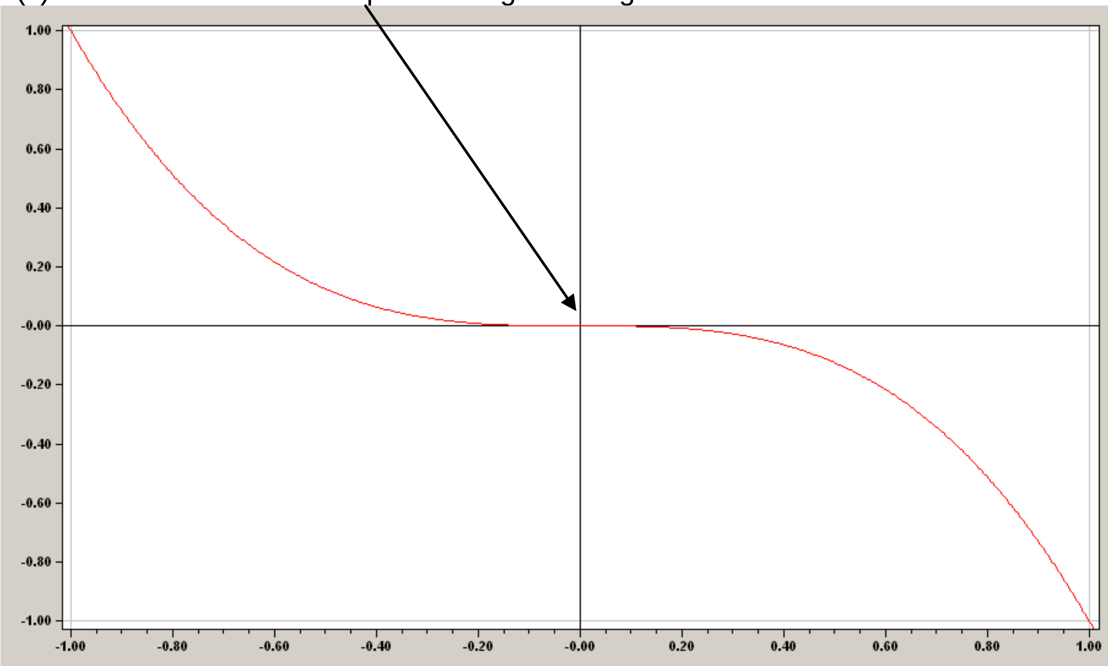
$f_2(x) = -x^3$



[5] *lat.: cubus Würfel / Volumen des Würfels ist a³*

Dabei ist der Verlauf im Bereich von –1 bis +1 (x–Achse) von besonderer Bedeutung. Es zeigt sich im Bild ein sog. Sattelpunkt/Terrassenpunkt:

$f(x) = -x^3$ Sattelpunkt: Vergrößerung des Bereiches!



4.2. <u>die längs der y–Achse verschobene kubische Funktion</u>

Die Funktionsgleichung ist: $f(x) = x^3$ wird wie bei der quadratischen Funktion abgeändert: $f(x) = x^3 + c$. Betrachtet man zusätzlich, dass auch hier die Formvariable $a \in R \setminus \{0\}$ als Faktor angehängt werden kann, so erhält man allgemein: $f(x) = ax^3 + c$.

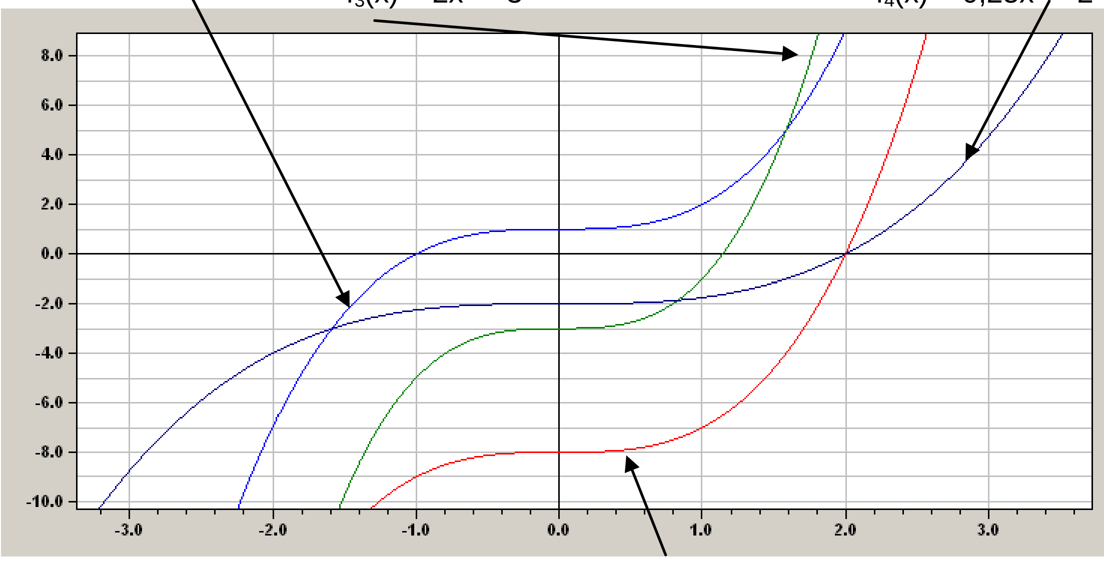
Schauen wir uns einige wenige Vertreter dieser Gruppe an:

$f_1(x) = x^3 + 1$ $f_2(x) = x^3 - 8$

$f_3(x) = 2x^3 - 3$ $f_4(x) = 0{,}25x^3 - 2$

$f_1(x) = x^3 + 1$

$f_3(x) = 2x^3 - 3$ $f_4(x) = 0{,}25x^3 - 2$



$f_2(x) = x^3 - 8$

Nullstellenberechnung:

zu $f_1(x) = x^3 + 1$: $x^3 + 1 = 0 \longrightarrow x^3 = -1 \longrightarrow x = -1$ bzw. $x = -\sqrt[3]{1} \longrightarrow N(-1/0)$

zu $f_2(x) = x^3 - 8$: $x^3 - 8 = 0 \longrightarrow x^3 = 8 \longrightarrow x = 2$ bzw. $x = \sqrt[3]{8} \longrightarrow N(2/0)$

zu $f_3(x) = 2x^3 - 3$: $2x^3 - 3 = 0 \longrightarrow x^3 = 1{,}5 \longrightarrow x = \sqrt[3]{1{,}5} \longrightarrow N(\sqrt[3]{1{,}5}\,/0)$

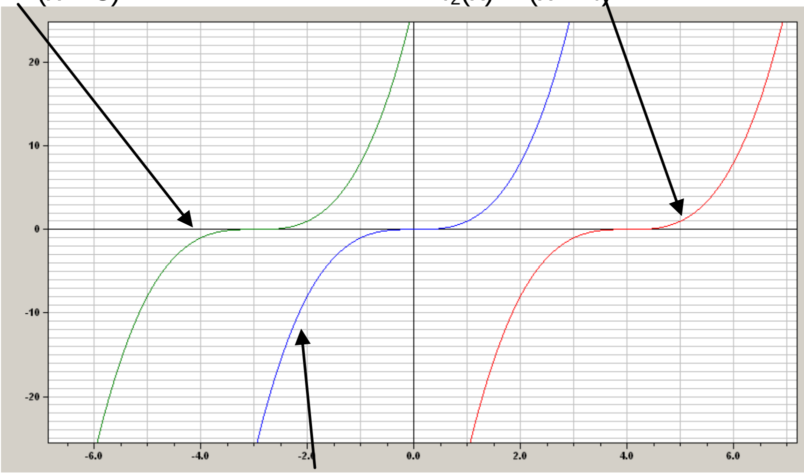
zu $f_4(x) = 0{,}25x^3 - 2$: $0{,}25x^3 - 2 = 0 \longrightarrow x^3 - 8 = 0 \longrightarrow$ s.o. $N(2/0)$

4.3. die längs der x–Achse verschobene kubische Funktion

Die Funktionsgleichung ist: $f(x) = ax^3$ wird wie bei der quadratischen Funktion abgeändert: $f(x) = a(x - x_S)^3$, wobei auch hier die Formvariable $a \in R \setminus \{0\}$ als Faktor angehängt ist.

Schauen wir uns einige wenige Vertreter dieser Gruppe an:

$f_1(x) = (x + 3)^3$ $\qquad$ $f_2(x) = (x - 4)^3$



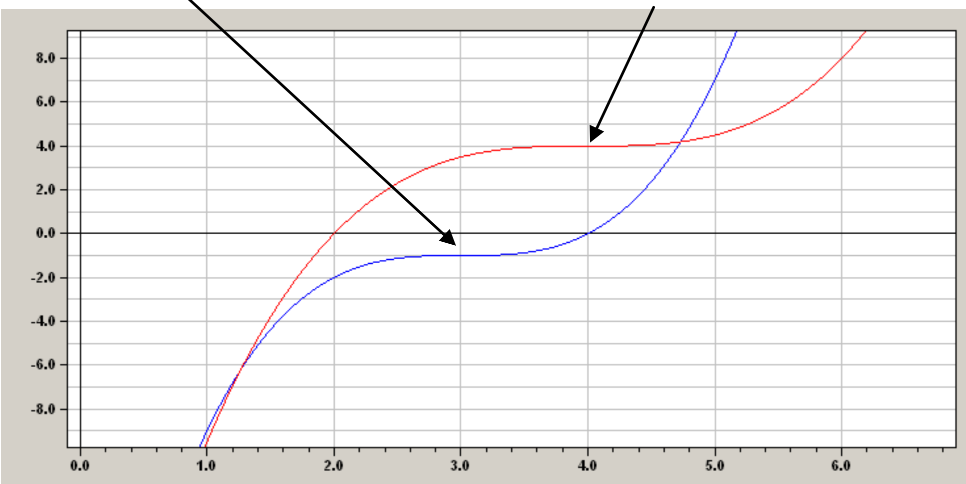
$f(x) = x^3$

4.4. die allgemeine verschobene kubische Funktion

Die Funktionsgleichung ist: $f(x) = ax^3$ wird wie bei der quadratischen Funktion abgeändert: $f(x) = a(x - x_S)^3 + c$.

Schauen wir uns einige wenige Vertreter dieser Gruppe an:

$f_1(x) = (x - 3)^3 - 1$ $\qquad$ $f_2(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^3 + 4$



Nullstellenberechnung:

zu $f_1(x) = (x - 3)^3 - 1$:

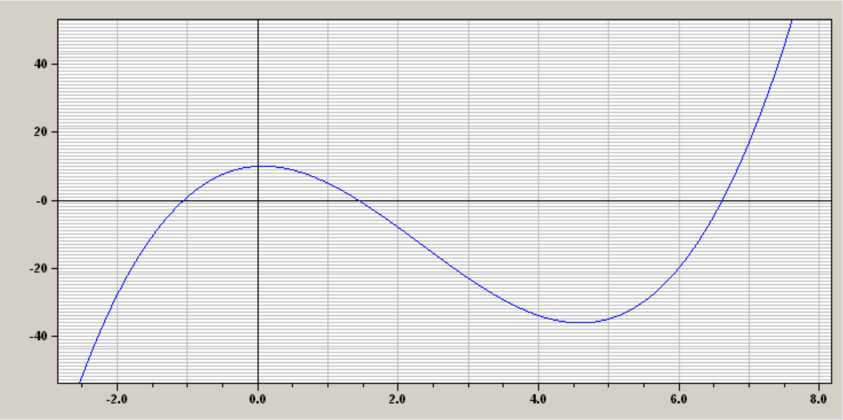
$(x - 3)^3 - 1 = 0 \longrightarrow = (x - 3)^3 = 1 \longrightarrow x - 3 = 1 \longrightarrow x = 4 \longrightarrow N(4/0)$

zu $f_2(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^3 + 4$:

$\frac{1}{2}(x - 4)^3 + 4 = 0 \longrightarrow (x - 4)^3 = -8 \longrightarrow x - 4 = -2 \longrightarrow x = 2 \longrightarrow N(2/0)$

4.5. die allgemeine kubische Funktion

Die Funktionsgleichung ist: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Leider gibt es zu dieser Funktion keine allgemein anwendbare Nullstellenberechnung. Im Einzelfall müssen „Tricks“ verwendet werden; dazu mehr in den GK bzw. LK der MSS 11! Das Aussehen könnte dann bei einer Funktion etwa so sein: $[f(x) = x^3 - 7x^2 + x + 10]$



5. Die biquadratische[6] Funktion:

Die Funktionsgleichung ist: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Nur gerade Exponenten kommen vor, so dass ein kleiner Kunstgriff die Möglichkeit bringt, Nullstellen auszurechnen.
Wir betrachten das 1. Beispiel $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

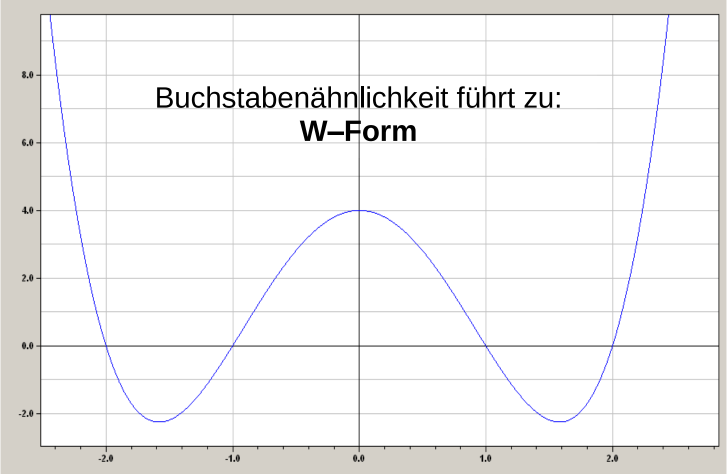
SUBSTITUTION[7]: $x^2 = z$

$z^2 - 5z + 4 = 0$

$z_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}$

$z_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \longrightarrow z_1 = 4 \,;\, z_2 = 1$

RESUBSTITUTION[8]: $x_{1/2} = \pm\sqrt{z}$

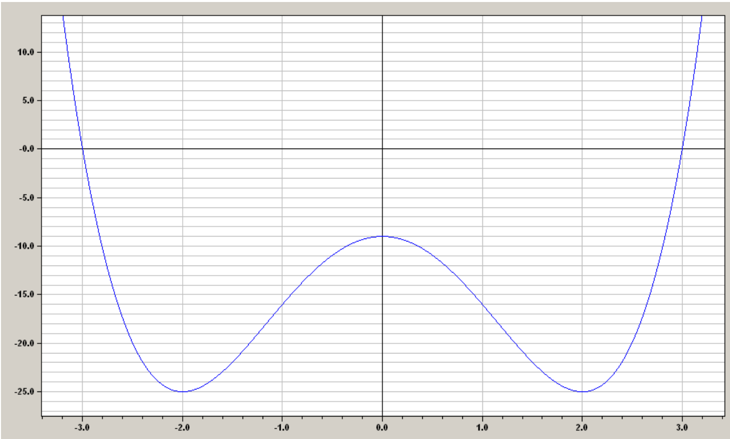


[6] *Der Name kommt von der griech. Vorsilbe di bzw. bi: zweifach / biquadratisch ≡ „doppelquadratisch“.*
[7] *lat.: substituere = ersetzen*
[8] *lat.: resubstituere = zurückersetzen, zurückführen*

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{4} \text{ und } x_{3/4} = \pm\sqrt{1}$$

Es folgt somit: $x_{1/2} = \pm 2$ und $x_{3/4} = \pm 1$, also $N_{1/2}(\pm 2/0)$ und $N_{3/4}(\pm 1/0)$.

Wir betrachten das 2. Beispiel $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$.



$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

SUBSTITUTION: $x^2 = z$

$z^2 - 8z - 9 = 0$

$z_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16+9}$

$z_{1/2} = 4 \pm 5 \longrightarrow z_1 = 9 \,;\, z_2 = -1$

RESUBSTITUTION: $x_{1/2} = \pm\sqrt{z}$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{9}$ und $x_{3/4} = \pm\sqrt{-1}$

Es folgt somit: $x_{1/2} = \pm 3$, aber $x_{3/4}$ = n.d. —> $N_{1/2}(\pm 3/0)$.

Wir betrachten das 3. Beispiel $f(x) = x^4 + 8x^2 + 15$.

$x^4 + 8x^2 + 15 = 0$

SUBSTITUTION: $x^2 = z$

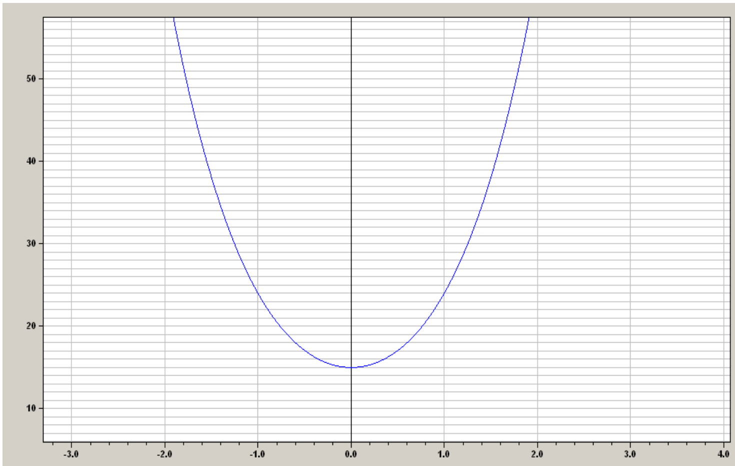
$z^2 + 8z + 15 = 0$

$z_{1/2} = -4 \pm \sqrt{16-15}$

$z_{1/2} = -4 \pm 1 \longrightarrow z_1 = -3 \,;\, z_2 = -5$

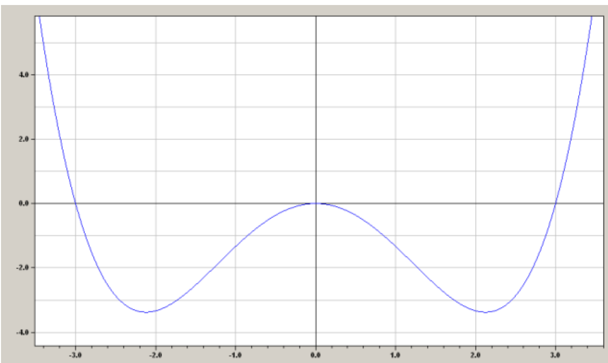
RESUBSTITUTION: $x_{1/2} = \pm\sqrt{z}$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{-3}$ und $x_{3/4} = \pm\sqrt{-5}$



Es folgt somit: $x_{1/2}$ = n.d. und $x_{3/4}$ = n.d.
—> Es gibt keine Nullstellen!
Das Aussehen ähnelt sehr stark den quadratischen Parabeln!

Wir betrachten das 4. Beispiel $f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{3}{2}x^2$.



$\frac{1}{6}x^4 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \longrightarrow x^4 - 9x^2 = 0$

KEINE SUBSTITUTION notwendig!

$x^2(x^2 - 9) = 0 \longrightarrow x^2(x- - 3)(x + 3) = 0$

$x_{1/2} = 0$ und $x_{3/4} = \pm 3$

—> Es gibt „drei“ Nullstellen: $N_{1/2}(0/0)$; $N_{3/4}(\pm 3/0)$.

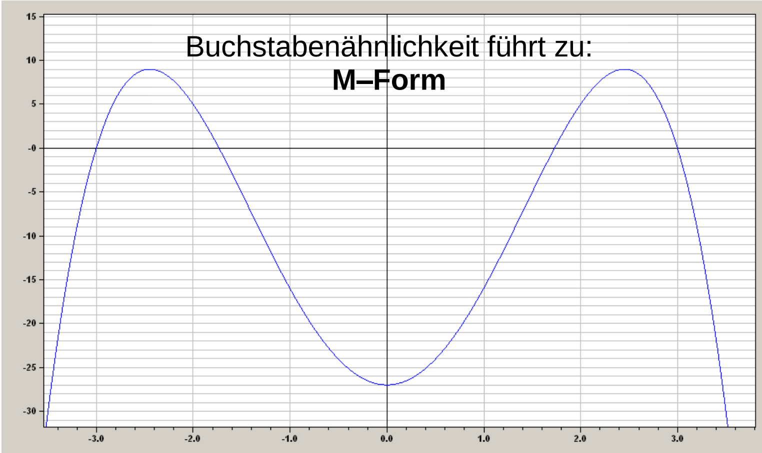
Wir betrachten das 5. Beispiel $f(x) = -x^4 + 12x^2 - 27$.

$-x^4 + 12x^2 - 27 = 0$
—> $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$

—> $z^2 - 12z + 27 = 0$
—> $z_{1/2} = 6 \pm 3$
—> $z_1 = 9$; $z_2 = 3$

—> $x_{1/2} = \pm 3$ und $x_{3/4} = \pm\sqrt{3}$

—> Es gibt 4 Nullstellen:
$N_{1/2}(\pm 3/0)$; $N_{3/4}(\pm\sqrt{3}/0)$.



6. Die Umkehrfunktion „$f^{-1}(x)$" von Potenzfunktionen:

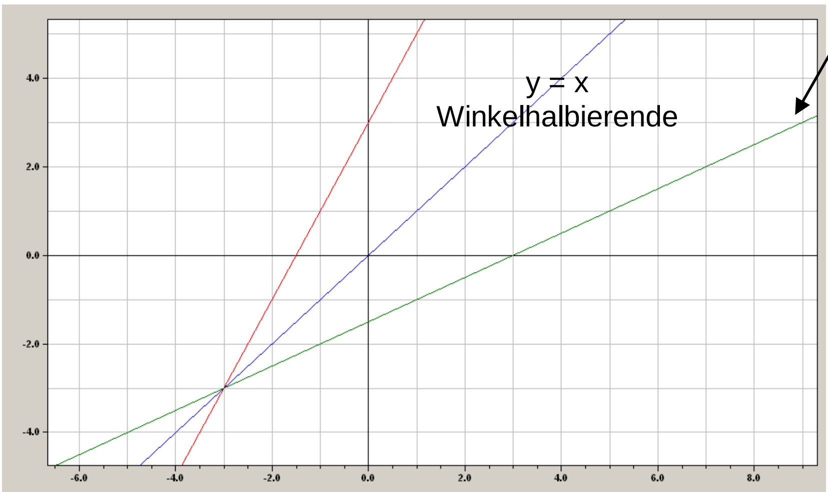
6.1. Umkehrung einer Geraden:0

Im Prinzip ist das Umkehren ganz einfach: Man muss lediglich in der Funktionsvorschrift x und y vertauschen und anschließend wieder nach y freistellen!

Sei einmal die Gerade f: $y = 2x + 3$ gegeben. Wir schreiben jetzt $x = 2y + 3$ und stellen frei:
$2y = x - 3$ —> $f^{-1}(x)$: $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$. Fertig!

Das Bild sieht nun so aus:

f: $y = 2x + 3$ $\qquad$ $f^{-1}(x)$: $y = 0{,}5x - 1{,}5$



Man erkennt, dass das Umkehren durch eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten durchgeführt werden kann.

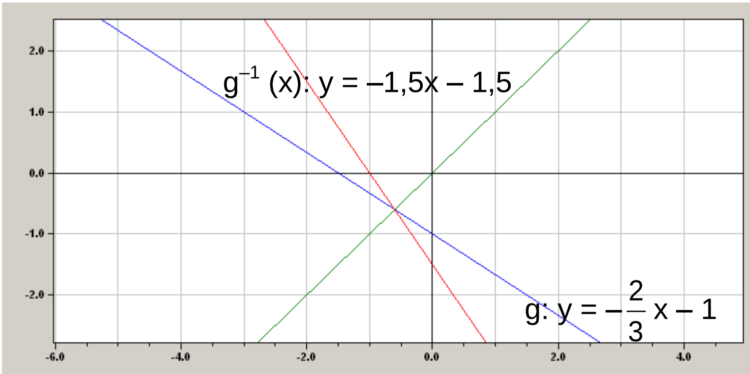
Sei nun zur weiteren Übung die Gerade g: $y = -\frac{2}{3}x - 1$ gegeben.

Weg zur Umkehrfunktion:

$$x = -\frac{2}{3}y - 1$$

$$\frac{2}{3}y = -x - 1$$

$$g^{-1}(x):\ y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

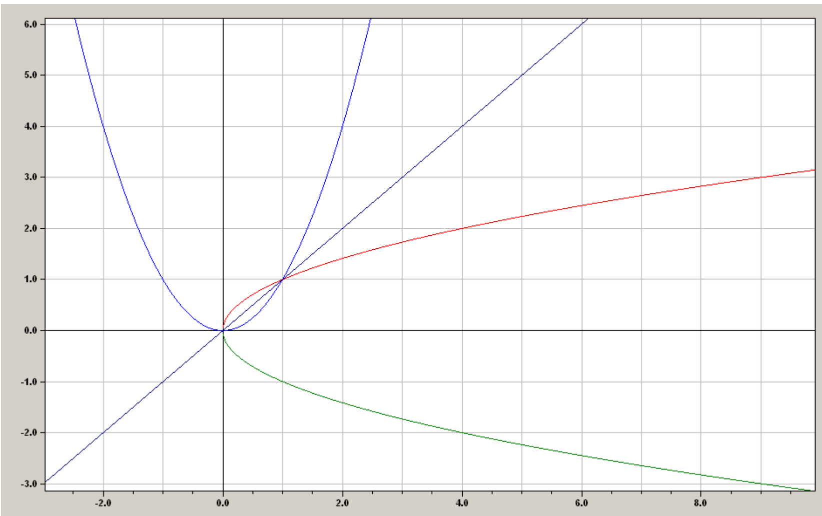


6.2. Umkehrung einer Parabel (knappe Fassung):

Im Prinzip ist das Umkehren auch hier ganz einfach: Man muss wie immer lediglich in der Funktionsvorschrift x und y vertauschen und anschließend wieder nach y freistellen! Doch das Ergebnis muss unbedingt interpretiert werden:

Sei einmal die Parabel f: $y = x^2$ gegeben. Wir schreiben jetzt $x = y^2$ und stellen frei: $y = \pm\sqrt{x}$.
Dies ist KEINE Funktion, sondern eine Relation.

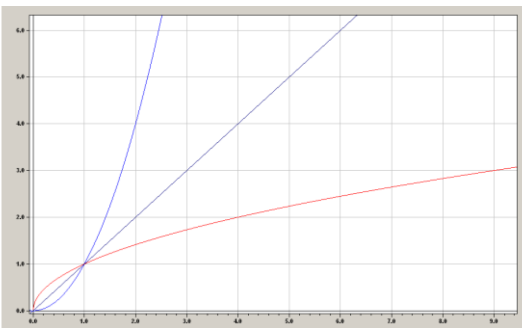
f: $y = x^2$ $y = x$



$y = +\sqrt{x}$ oberer Ast der Relation, der entstanden ist durch Spiegelung des rechten Astes der Np.

$y = -\sqrt{x}$ unterer Ast der Relation, entstanden durch Spiegelung des linken Astes der Np

Aus der Relation machen wir eine Funktion, indem wir den Definitionsbereich einschränken. So ist die Aufspaltung in den Bereich rechts oder links vom Scheitel gängig.



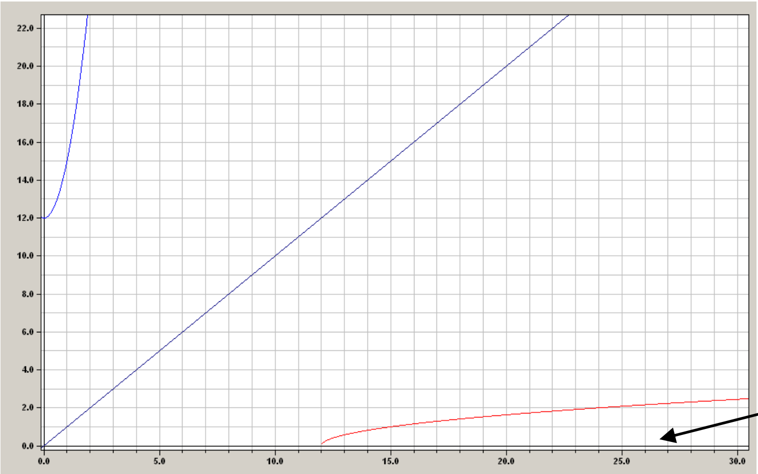
Wählen wir $D_f = \mathbf{R}^+$, so hat f: $y = x^2$ die Umkehrfunktion f^{-1}: $y = +\sqrt{x}$.

Wählen wir $D_f = \mathbf{R}^-$, so hat f: $y = x^2$ die Umkehrfunktion f^{-1}: $y = -\sqrt{x}$.

Sei nun in einem weiteren Beispiel für das Umkehren die Parabel f: $y = 3x^2 + 12$ gegeben.

$y = 3x^2 + 12 \longrightarrow x = 3y^2 + 12 \longrightarrow 3y^2 = x - 12 \longrightarrow y^2 = \frac{1}{3}x - 4 \longrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}x - 4}$.

Wählt man $D_f = \mathbf{R}^+$, so ergibt sich der Wertebereich zu $W_f = \{ y \mid y > 12 \}$.



Für die Umkehrfunktion werden die Bereiche D und W – wie schon vorab die Variablen – ausgetauscht.

Es ist $D_{f-1} = \{ x \mid x > 12 \}$ und $W_{f-1} = R^+$.

f^{-1}: $y = +\sqrt{\frac{1}{3}x - 4}$

Sei nun ein schweres Beispiel für das Umkehren gegeben: f: $y = \frac{1}{2}x^2 - 7x - 16$.

$y = \frac{1}{2}x^2 - 7x - 16 \longrightarrow x = \frac{1}{2}y^2 - 7y - 16 \longrightarrow 2x = y^2 - 14y - 32 \longrightarrow y^2 - 14y - 32 - 2x = 0$

$y_{1/2} = 7 \pm \sqrt{49 + 32 + 2x} \longrightarrow y_{1/2} = 7 \pm \sqrt{81 + 2x}$.

Wählt man $D_f = \{ x \mid x > 7 \}$, so ergibt sich der Wertebereich zu $W_f = \{y \mid y > -38{,}5 \}$. [Einfach die 7 in die Funktionsgleichung einsetzen. Dann hat man die Scheitelkoordinaten!]

Es ist dann $D_{f-1} = \{x \mid x > -38{,}5 \}$ und $W_{f-1} = \{ y \mid y > 7 \} \longrightarrow f^{-1}$: $y = +7 + \sqrt{81 + 2x}$.

6.3. Wurzelgleichungen:

Betrachtet man als 1. Beispiel die Funktion $f_1(x) = \sqrt{x}$ und die Funktion $f_2(x) = \sqrt{4-x}$. so kann man sich fragen, ob diese beiden Funktionen gemeinsame Punkte haben oder nicht. Dazu ist es notwendig, zu Beginn ❶ die **Definitionsbereiche** der Funktionen zu ermitteln:

Funktion $f_1(x) = \sqrt{x}$ ist definiert für $x \geq 0$

Funktion $f_2(x) = \sqrt{4-x}$ ist definiert für $4 - x \geq 0$, d.h. für $x \leq 4$

Dies bedeutet, dass es einen Schnittpunkt oder auch mehrere geben könnte, die im Bereich von 0 bis 4 liegen.

Als weiteres Vorgehen hat man nach dem **Gleichsetzen** der beiden Funktionen, falls möglich, die Wurzel zu **isolieren** ❷. Dies hat zur Folge: $\sqrt{x} = \sqrt{4-x}$. Da es sich um zwei Wurzeln handelt, ist unter Isolieren einer Wurzel das Notieren (je) einer Wurzel auf einer Seite gemeint. **Schreibe bitte NIE beide Wurzeln auf EINE Seite, falls nur 2 Wurzeln vorkommen!** Wie geht es weiter? Eigentlich ganz einfach, man muss nur die Gleichung mit 2 potenzieren ❸:

$$\sqrt{x} = \sqrt{4-x} \quad | \text{ pot. 2 } (\equiv \text{quadrieren!})$$

$$x = 4 - x$$

Als logische Weiterführung ist nun die rechnerische Lösung der Aufgabe gefragt ❹:

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Bevor wir voreilig schließen, dass bei x = 2 die Schnittstelle liegt, **MUSS** nach einem Blick zum Definitionsbereich die Probe in der Ausgangsgleichung gemacht werden ❺.

$$\sqrt{2} = \sqrt{2} \ \checkmark$$

Jetzt folgt erst der Abschluss der Aufgabe, indem wir die Lösungsmenge notieren ❻: $L = \{(2/\sqrt{2})\}$.

Nach diesem ersten Beispiel müssen andere folgen, die auch teilweise andere Perspektiven in der Lösbarkeit aufzeigen.

<u>Beispiel 2:</u> Löse die Wurzelgleichung $\sqrt{x} = 2 - x$.

❶ $D = R_0^+$

❷ $\sqrt{x} = 12 - x$

❸ $x = 144 - 24x + x^2$

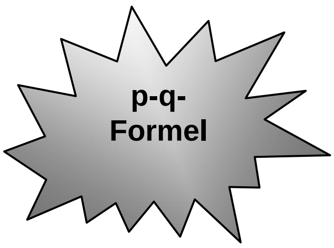
❹ $x^2 - 25x + 144 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{25}{2} \pm \sqrt{\frac{625}{4} - \frac{144 \cdot 4}{4}}$$

$$x_{1/2} = \frac{25}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}}$$

$$x_{1/2} = \frac{25}{2} \pm \frac{7}{2}$$

$$x_1 = 17 \text{ und } x_2 = 9$$



❺ Probe mit 17: $\sqrt{17} = 12 - 17$. Dies kann nicht sein, denn links steht eine positive Zahl, rechts jedoch eine negative. Die 17 ist keine Lösung!

❺ Probe mit 9; $\sqrt{9} = 12 - 9$ bzw. $3 = 3$ ✔

❻ $L = \{ 9 \}$

Warum keine Punktkoordinaten genannt werden, ist eine Folge der Fragestellung. Es war nicht von einem Schnittpunkt die Rede, sondern (nur) von der Lösung der gegebenen Gleichung.

Beispiel 3: Löse die Wurzelgleichung $\sqrt{x} - \sqrt{x-9} = 1$.

zweimal quadrieren!

❶ $D_1 = R_0^+$ und $D_2 = \{x \mid x \geq 9\}$ ➔ $D = \{x \mid x \geq 9\}$

❷ $\sqrt{x} = \sqrt{x-9} + 1$

❸ $x = x - 9 + 2\sqrt{x-9} + 1$

$0 = -8 + 2\sqrt{x-9}$

Nachdem die Wurzel nicht durch das Potenzieren beseitigt werden konnte, beginnt der Vorgang wieder bei ❷ (Isolieren!)

❷ $8 = 2\sqrt{x-9} \quad | :2$

$4 = \sqrt{x-9}$

❸ $16 = x - 9$

❹ $x = 25$

❺ Probe: $\sqrt{25} - \sqrt{25-9} = 1$ bzw. $5 - 4 = 1$ ✔

❻ L = { 25 }

Warum keine Punktkoordinaten genannt werden, ist … (s.o.).

Beispiel 4: Löse die Wurzelgleichung $\sqrt{x-9} - \sqrt{x} = 1$.

❶ $D_2 = R_0^+$ und $D_1 = \{x \mid x \geq 9\}$ ➔ $D = \{x \mid x \geq 9\}$

❷ $\sqrt{x-9} = \sqrt{x} + 1$

❸ $x - 9 = x + 2\sqrt{x} + 1$

$-10 = +2\sqrt{x-9}$

Nachdem die Wurzel nicht durch das Potenzieren beseitigt werden konnte, beginnt der Vorgang wieder bei ❷ (Isolieren!)

❷ $-5 = \sqrt{x-9}$

🡐 Kann schon nicht sein! Links negativ, rechts positiv!!!

❸ $25 = x - 9$

❹ $36 = x$

❺ Probe: $\sqrt{36-9} - \sqrt{36} = 1$ bzw. $5 - 6 = 1$. Die Probe zeigt eine fakSche Aussage.

Damit gilt:

❻ L = { }

Beispiel 5: Löse die Wurzelgleichung $14 + \sqrt[3]{x-2} = 20$.

❶ D = R

Bemerkung: Sollte der Radikand Positiv sein, so ist der Wurzelwert $\sqrt[3]{x-2}$. Sollte der Radikand aber negativ sein, so schreibt man: $-\sqrt[3]{|x-2|}$.

❷ $14 + \sqrt[3]{x-2} = 20$

$\sqrt[3]{x-2} = 6 \quad |$ potenzieren mit 3

❸ $x - 2 = 216$

❹ $x = 218$

❺ Probe: $14 + \sqrt[3]{218-2} = 20$ bzw. $14 + 6 = 20$ ✓

❻ L = { 218 }

kubische Wurzel bedeutet natürlich Potenzieren mit 3!!!

Beispiel 6: Löse die Wurzelgleichung $\sqrt{x} = x$.

> **Terme $T_1 \cdot T_2 = 0$ …**
> **…**
> **… mindestens ein Faktor 0 ist.**

❶ $D = R$

❷ $\sqrt{x} = x$

❸ $x = x^2$

❹ $x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x_1 = 0$ und $x_2 = 1$

❺ Probe für $x = 0$: $\sqrt{0} = 0$ ✓

Probe für $x = 1$: $\sqrt{1} = 1$ ✓

❻ $L = \{ 0 ; 1 \}$

Beispiel 7: Löse die Wurzelgleichung $\frac{3}{2}\sqrt{x-1} = 6$.

❶ $D = \{x \mid x \geq 1\}$

❷ $\frac{3}{2}\sqrt{x-1} = 6$

$\sqrt{x-1} = 4$

❸ $x - 1 = 16$

❹ $x = 17$

❺ Probe: $\frac{3}{2}\sqrt{17-1} = 6$ bzw. $1{,}5 \cdot 4 = 6$ ✓

❻ $L = \{ 17 \}$

Beispiel 7: Löse die Wurzelgleichung $\frac{3}{2}\sqrt[5]{9-x} = 3$.

❶ $D = R$

❷ $\frac{3}{2}\sqrt[5]{9-x} = 3$

$\sqrt[5]{9-x} = 2$

❸ $9 - x = 2^5$ $[\ 2^5 = 32\ ]$

❹ $x = -23$

❺ Probe: $\frac{3}{2}\sqrt[5]{9-(-23)} = 3$ bzw. $\frac{3}{2} \cdot 2 = 3$ ✓

❻ $L = \{ -23 \}$

Beispiel 7: Löse die Wurzelgleichung $\sqrt[6]{x^2+53} = \sqrt[3]{x+1}$.

❶ $D = R$

❷ $\sqrt[6]{x^2+53} = \sqrt[3]{x+1}$

❸ $x^2 + 53 = (x+1)^2$

❹ $x^2 + 53 = x^2 + 2x + 1$

$52 = 2x$

$x = 26$

❺ Probe: $\sqrt[6]{26^2+53} = \sqrt[3]{26+1}$ bzw. $\sqrt[6]{729} = 3$ ✓

❻ $L = \{ 26 \}$

7. Die Potenzgesetze und Regeln als Wiederholung:

PG 1:	**Man multipliziert Potenzen mit gleicher Basis, indem man die Exponenten[9] addiert und die gemeinsame Basis beibehält: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$**

PG 2:	**Man dividiert Potenzen mit gleicher Basis, indem man die Exponenten subtrahiert und die gemeinsame Basis beibehält: $a^m : a^n = a^{m-n}$**

PG 3:	**Man multipliziert Potenzen mit gleichem Exponenten, indem man die Basen multipliziert und den gemeinsamen Exponenten beibehält: $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$**

PG 4:	**Man dividiert Potenzen mit gleichem Exponenten, indem man die Basen dividiert und den gemeinsamen Exponenten beibehält: $a^m : b^m = (a : b)^m$**

PG 5:	**Man potenziert Potenzen, indem man die Exponenten multipliziert und die Basis beibehält: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$**

Folgerungen aus diesen Potenzgesetzen:

- $a^m : a^m = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = \boxed{\mathbf{a^0 = 1}}$
- $a^0 : a^m = \boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$
- $\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$
- $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m}$

8. Die allgemeinen Potenzfunktionen $f(x) = x^n$:

8.1. Exponent ist natürlich:

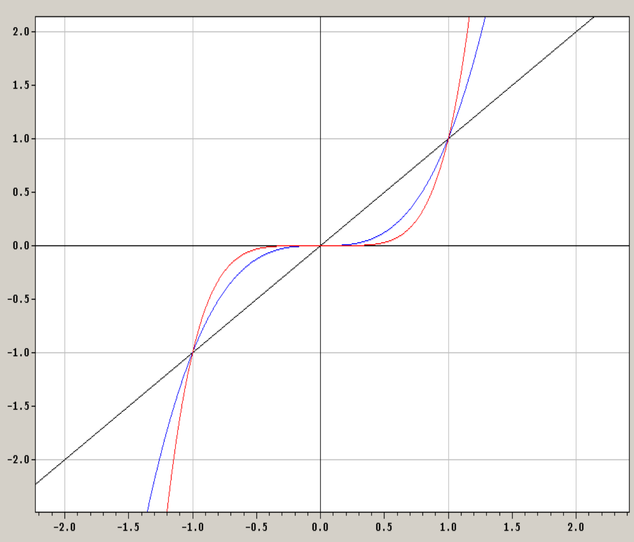
Beispiele solcher Funktionen haben wir in den Grundzügen besprochen. Es gehören die Funktionen $y = mx + b$ ebenso dazu, wie $y = ax^2 + bx + c$ oder gar $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ usw. Wir beschränken uns hier auf die **Haupteigenschaften** der reinen Potenzfunktionen, also $y = ax$, $y = ax^2$, $y = ax^3$ oder allgemein $y = ax^n$ mit $n \in N$.

Um einen Überblick zu erhalten, werden diese Funktionen unterteilt in die, deren Exponent gerade bzw. ungerade ist. Und dabei betrachten wir die Grundtypen für positive, ganzzahlige (natürliche) Exponenten

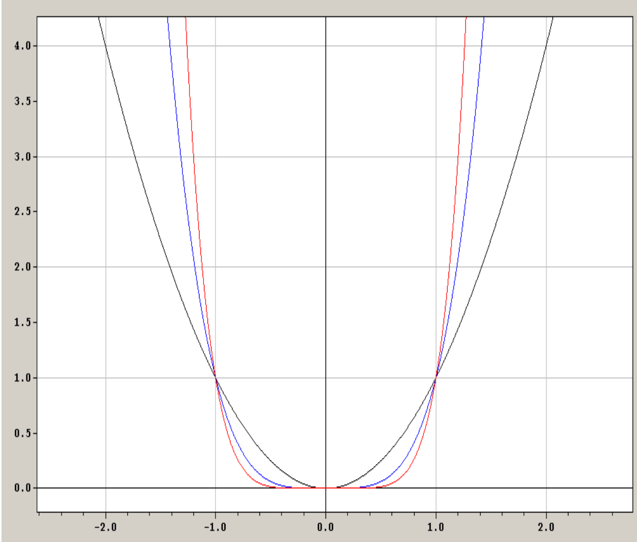
$f(x) = x$ / $g(x) = x^3$ / $h(x) = x^5$ $\qquad$ $f(x) = x^2$ / $g(x) = x^4$/ $h(x) = x^6$

[9] *lat.: exponere = herausstellen*

ungerade Exponenten



gerade Exponenten



Eigenschaften:

- Die Grafen gehen durch (1/1) und (-1/-1).
- Die Grafen gehen durch den Ursprung.
- Der Definitionsbereich ist D = R.
- Der Wertebereich ist W = R.
- Die Grafen sind punktsymmetrisch zum Ursprung.
- Die Grafen steigen monoton im gesamten Verlauf.
- Je höher der Exponent, desto stärker steigen die Grafen in die positive Unendlichkeit.
- Man sagt: **Sie kommen aus der —∞ und gehen in die +∞.**

- Grafen gehen durch (1/1) und (+1/-1).
- Die Grafen gehen durch den Ursprung.
- Der Definitionsbereich ist D = R.
- Der Wertebereich ist W = R_0^+.
- Die Grafen sind y-achsensymmetrisch.
- Die Grafen fallen für x < 0, sie steigen für x > 0.
- Je höher der Exponent, desto stärker steigen die Grafen ab x > 0 in die positive Unendlichkeit für x --> **+∞**.
- Man sagt: **Sie kommen aus der +∞ und gehen in die +∞.**

8.2. Exponent ist ganzzahlig negativ:

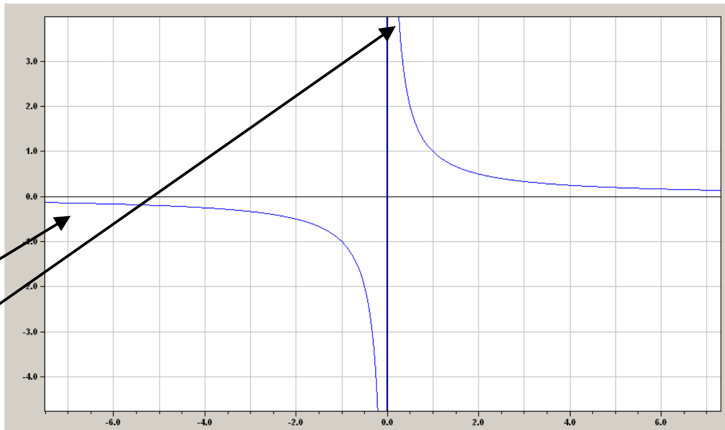
8.2.1. Exponent ist ungerade:

Aus der Folgerung der Potenzregeln ist bekannt, dass „$a^0 : a^n = \boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$". Statt den Exponenten „einfach nur zu schreiben“, nehmen wir positive Exponenten mit dem Vorzeichen "-".

Wie sehen nun Vertreter dieser Funktionsgruppe aus?

Das einfachste Beispiel ist $f(x) = \frac{1}{x}$.

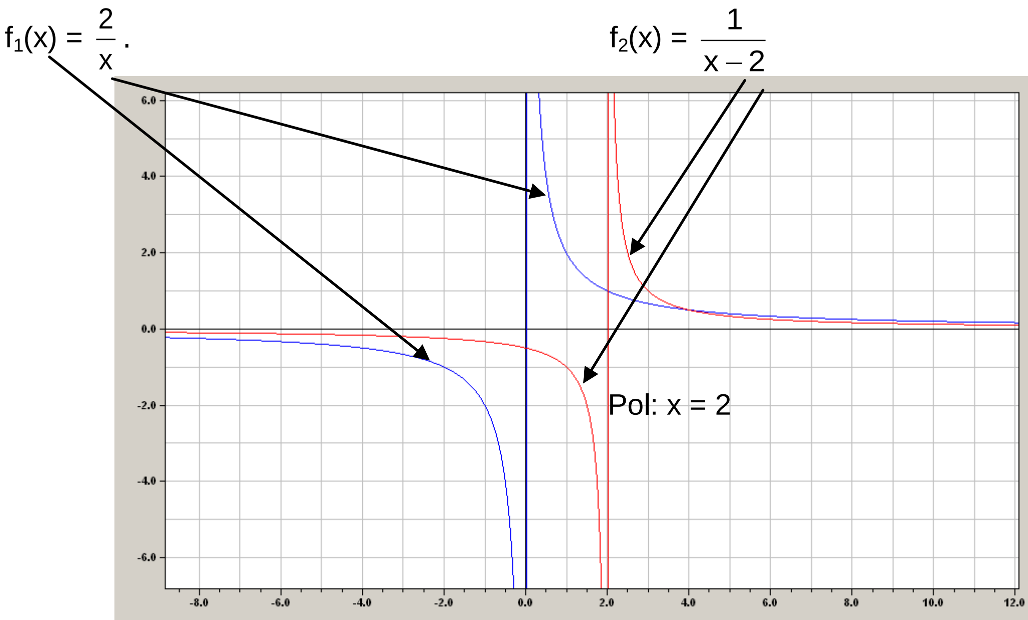
(linker Ast)
(rechter Ast)



Was sofort festzustellen ist, dass der Graf nicht „durchgängig“ ist. Er wird an der Stelle 0 unterbrochen.
Da in der Vergangenheit der Mittelstufe intensiv gelehrt und an Beispielen vielfach untermauert wurde, dass man „**durch alles dividieren darf, was nicht Null ist oder Null werden kann**“, ist jetzt klar, dass der Nenner von f(x) nie Null werden darf, d.h.: **D = R \ { 0 }**, in Worten: Der Definitionsbereich ist die Menge der reellen Zahlen **ohne die Zahl 0.** Diese Stelle (hier x = 0) nennt man **Definitionslücke** oder **Pol**.
Weiter ist „sichtbar“, dass die Funktion für x --> +∞ gegen die x-Achse läuft, ohne sie je zu erreichen. Wir sprechen von der x-Achse als **Asymptote**[10], also **W = R \ { 0 }**.
In diesem Zusammenhang ist weiter erkennbar, dass die Funktion für x --> -∞ ebenfalls gegen die x-Achse läuft, ohne sie je zu erreichen. Wir sprechen auch hier von der x-Achse als Asymptote. Der Unterschied ist, dass sich der Graf für x > 0 **von oben** an die Asymptote annähert, für x < 0 **von unten**.

Auch Funktionen wie $f(x) = \frac{1}{x}$ kann man wie die Parabeln verschieben, strecken, stauchen, spiegeln. Dabei wird meist auch die Definitionslücke und die Asymptote verschoben und bedarf einer eindeutigen Berechnung, was nun trainiert werden soll.

Dazu schauen wir uns die folgenden Funktionen an:



Analyse der einzelnen Funktionen:

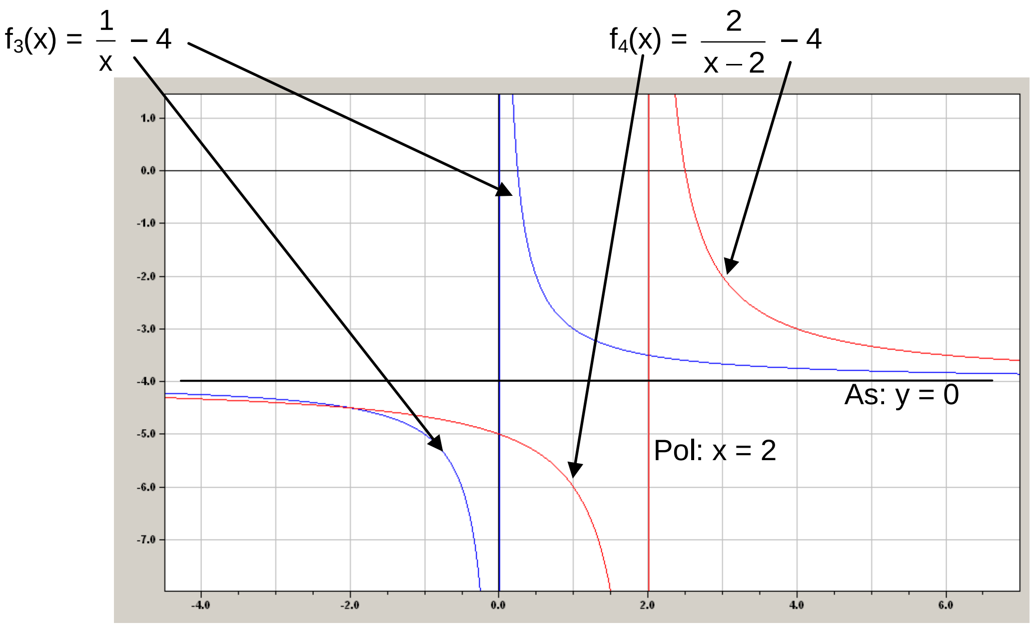
<u>zu $f_1(x) = \frac{2}{x}$</u>:

Man erkennt, dass der Formfaktor a = 2 im Zähler eine Streckung der Funktion bewirkt, ohne dass D oder W tangiert werden. Auch die Asymptote bleibt erhalten. Die Funktion wird somit keine Nullstellen haben.

<u>zu $f_2(x) = \frac{1}{x-2}$:</u>

Der x–Wert wird durch den Term „x – 2“ ersetzt. Dies bedeutet, dass die gesamte Funktion um 2 nach rechts geschoben wird. Die Folge ist, dass der Definitionsbereich jetzt heißen muss: D = R \ { 2}. Die Funktion wird ebenfalls keine Nullstellen haben.

---
[10] *Asymptote = nicht zusammenfallend, also Näherungskurve*



Analyse der einzelnen Funktionen:

<u>zu $f_3(x) = \frac{1}{x} - 4$:</u>

Der y–Wert der Funktion $\frac{1}{x}$ wird durch den Term „– 4“ verschoben. Dies bedeutet, dass die gesamte Funktion um 4 nach unten geschoben wird. Die Folge ist, dass der Definitionsbereich sich nicht ändert, der Wertebereich und die Asymptote jetzt aber verändert werden müssen. Der Wertebereich heißt: W = R \ { –4 }, denn die Asymptote ist eine Parallele zur x–Achse: y = –4. Die Funktion wird nun aber **Nullstellen** haben!

$\frac{1}{x} - 4 = 0 \longrightarrow \frac{1}{x} = 4$

Kehrt man nun beide Seiten um, so erhält man $\frac{x}{1} = \frac{1}{4}$ oder x = 0,25 —> N(0,25/0)

<u>zu $f_4(x) = \frac{2}{x-2} - 4$:</u>

Die Funktion wird um 2 nach rechts verschoben, mit dem Parameter 2 gestreckt und um 4 nach unten verschoben. Dies bedeutet:

- Asymptote ist nun eine Parallele zur x–Achse: y = –4.
- Der Definitionsbereich ändert sich: D = R \ { 2 },
- der Wertebereich heißt: W = R \ { –4 }.
- Nullstellen:

$$\frac{2}{x-2} - 4 = 0$$

$$\frac{2}{x-2} = 4$$

Kehrt man nun beide Seiten um, so erhält man:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{1}{4} \longrightarrow$$

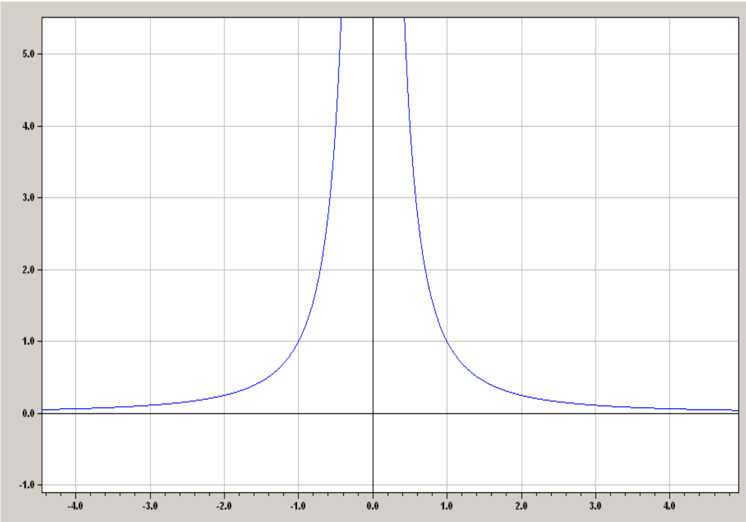
$$x - 2 = 0{,}5$$

$$x = 2{,}5 \longrightarrow N(2{,}5/0)$$

8.2.2.Exponent ist gerade:

Wie sehen nun Vertreter dieser Funktionsgruppe aus?

Das einfachste Beispiel ist $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

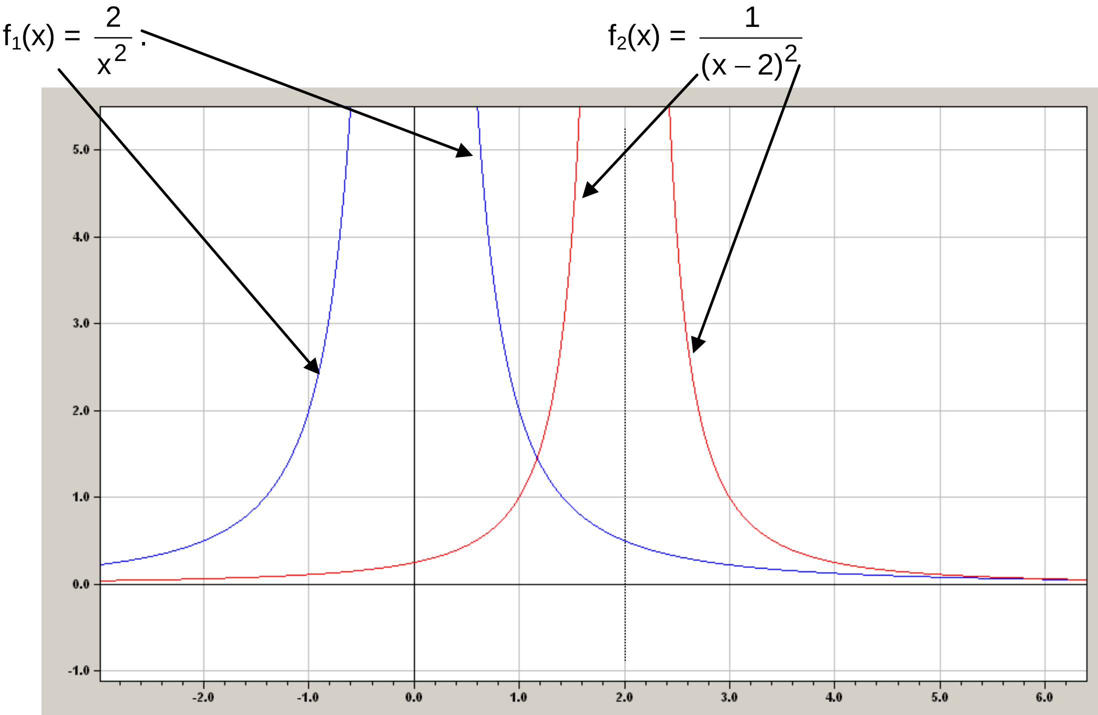


Was festzustellen ist, dass der Graf an der Stelle 0 eine Definitionslücke hat.

Weiter ist „sichtbar", dass die Funktion für x --> +∞ ebenfalls wie für x --> -∞ gegen die x-Achse läuft, ohne sie je zu erreichen. Die Asymptote ist y = 0, also **W = R \ { 0 }**. Dabei ist festzuhalten, dass beide Funktionsäste von oben sich der Asymptote nähern.

Auch Funktionen wie $f(x) = \frac{1}{x^2}$ kann man wie die Parabeln verschieben, strecken, stauchen, spiegeln. Dabei wird meist auch die Definitionslücke und die Asymptote verschoben und bedarf einer eindeutigen Berechnung, was nun trainiert werden soll.

Dazu schauen wir uns die folgenden Funktionen an:



Analyse der einzelnen Funktionen:

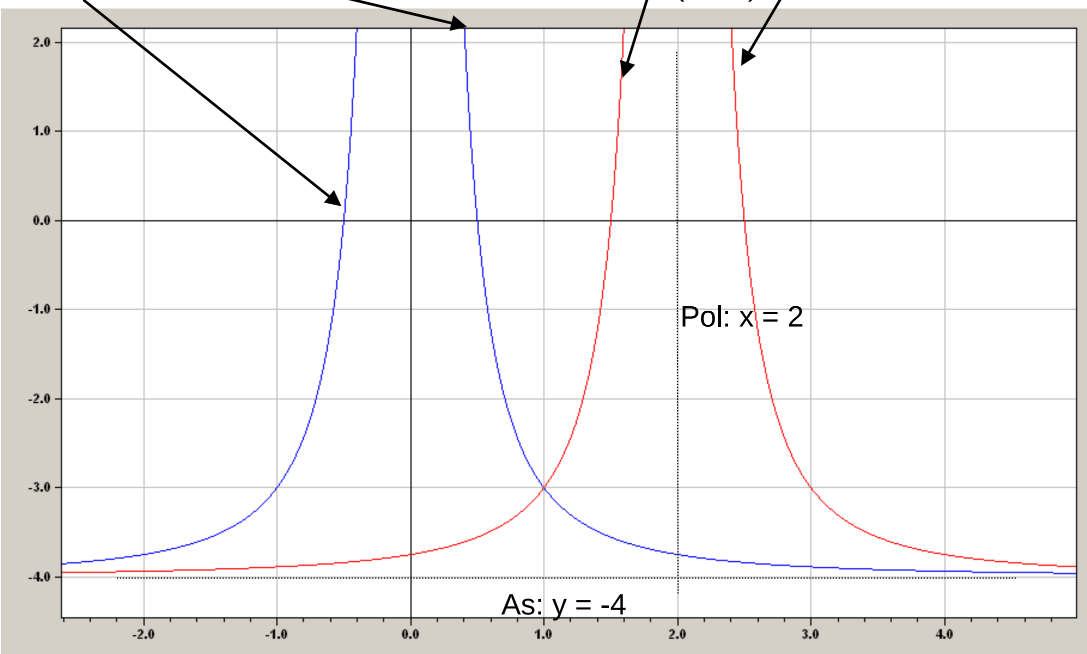
zu $f_1(x) = \frac{2}{x^2}$:

Man erkennt, dass der Formfaktor a = 2 im Zähler eine Streckung der Funktion bewirkt, ohne dass D oder W tangiert werden. Auch die Asymptote bleibt erhalten. Die Funktion wird somit keine Nullstellen haben.

zu $f_2(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$:

Der x–Wert wird durch den Term „x – 2“ ersetzt. Dies bedeutet, dass die gesamte Funktion um 2 nach rechts geschoben wird. Die Folge ist, dass der Definitionsbereich jetzt heißen muss: D = R \ { 2}. Die Funktion wird ebenfalls keine Nullstellen haben.

$f_3(x) = \dfrac{1}{x^2} - 4$ $f_4(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2} - 4$



Analyse der einzelnen Funktionen:

zu $f_3(x) = \dfrac{1}{x^2} - 4$:

Der y–Wert der Funktion $\dfrac{1}{x^2}$ wird durch den Term „– 4“ verschoben. Dies bedeutet, dass die gesamte Funktion um 4 nach unten geschoben wird. Die Folge ist, dass der Definitionsbereich sich nicht ändert, der Wertebereich und die Asymptote jetzt aber verändert werden müssen. Der Wertebereich heißt: W = R \ { –4 }, denn die Asymptote ist eine Parallele zur x–Achse: y = –4. Die Funktion wird nun aber **Nullstellen** haben!

$\dfrac{1}{x^2} - 4 = 0 \longrightarrow \dfrac{1}{x^2} = 4$

Kehrt man nun beide Seiten um, so erhält man $\dfrac{x^2}{1} = \dfrac{1}{4}$ oder $x^2 = 0{,}25 \longrightarrow x_{1/2} = \pm\dfrac{1}{2}$

$\rightarrow N_{1/2}(\pm\frac{1}{2}/0)$

zu $f_4(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2} - 4$:

Die Funktion wird um 2 nach rechts verschoben, nicht gestreckt oder gestaucht, aber um 4 nach unten verschoben. Dies bedeutet:

- Asymptote ist nun eine Parallele zur x–Achse: y = –4.
- Der Definitionsbereich ändert sich: D = R \ { 2 },
- der Wertebereich heißt: W = R \ { –4 }.

Nullstellen:

$$\frac{1}{(x-2)^2} - 4 = 0 \longrightarrow \frac{1}{(x-2)^2} = 4$$

Kehrt man nun beide Seiten um, so erhält man: $\frac{(x-2)^2}{1} = \frac{1}{4} \longrightarrow (x-2)^2 = 0{,}25$

$\longrightarrow x_{1/2} - 2 = \pm\, 0{,}5 \longrightarrow x_{1/2} = +\,2 \pm 0{,}5 \dashrightarrow x_1 = +\,2{,}5\ ;\ x_2 = +\,1{,}5$

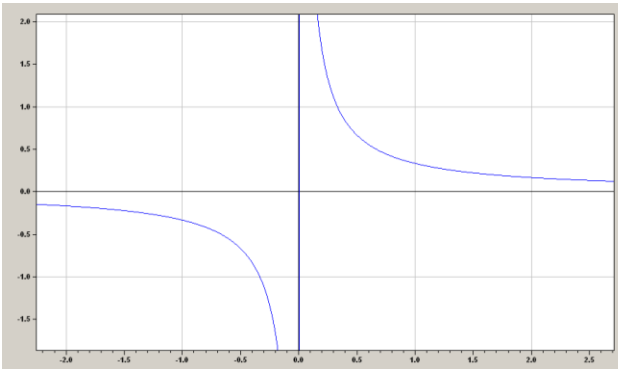
$\longrightarrow N_1(2{,}5/0)\ ;\ N_2(1{,}5/0)$

8.2.3. Übung im Bereich der „neuen“ Potenzfunktionen:

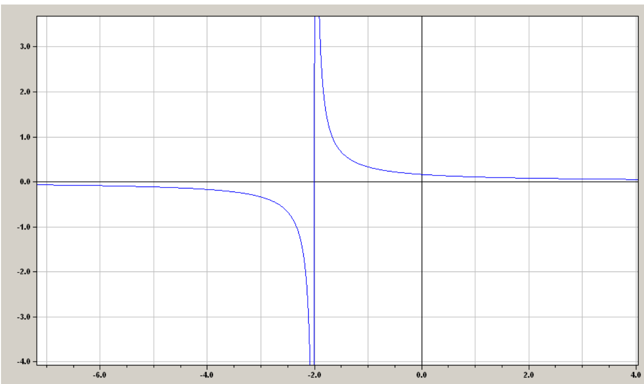
Charakterisiere die folgenden Funktionen in Eigentraining:

[Die „Bildchen“ sind lediglich zur Kontrolle bereits angegeben!!!]

$f_1(x) = \frac{1}{3x}$



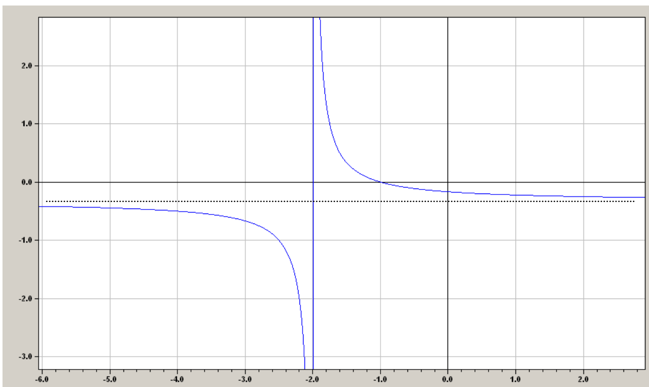
•
•
•
•
•
•
•



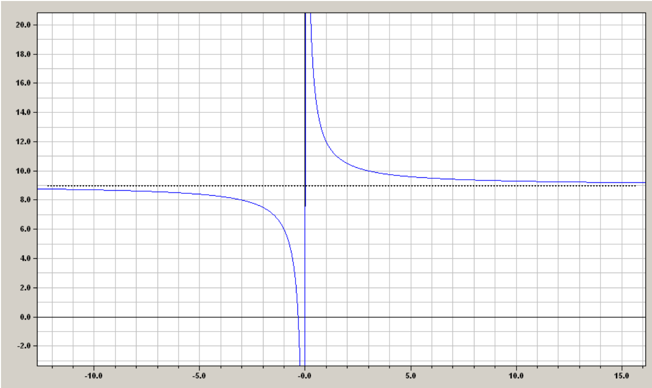
$f_2(x) = \frac{1}{3x+6}$

•
•
•
•
•
•
•

$f_3(x) = \frac{1}{3(x+2)} - 0{,}\overline{3}$

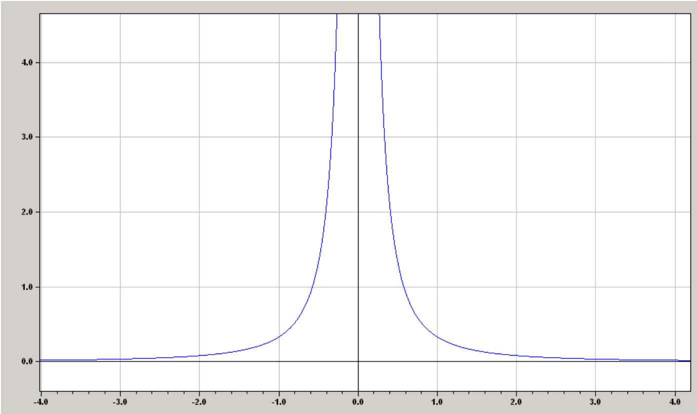


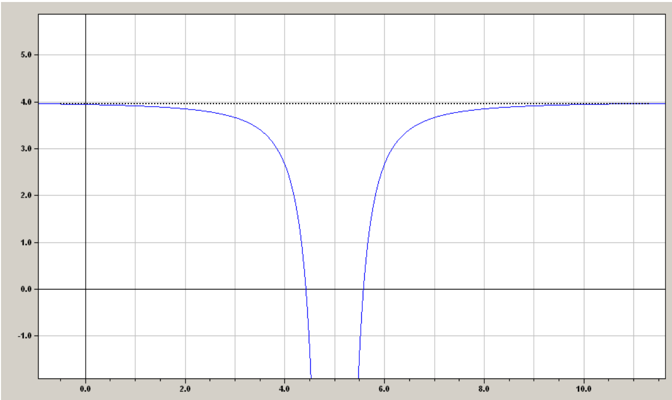
•
•
•
•
•
•
•



$$f_4(x) = \frac{3}{x} + 9$$

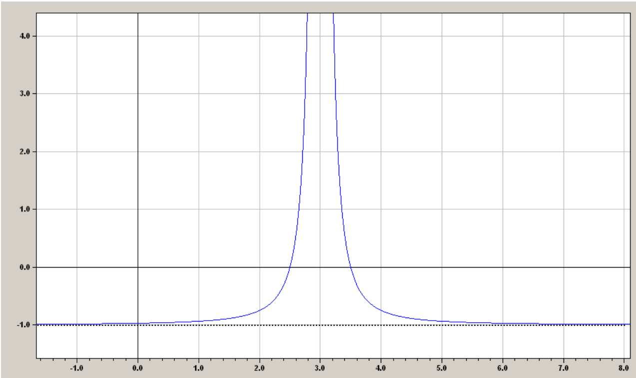
$$f_5(x) = \frac{1}{3x^2}$$





$$f_6(x) = -\frac{4}{3(x-5)^2} + 4$$

$$f_7(x) = \frac{1}{(2x-6)^2} - 1$$

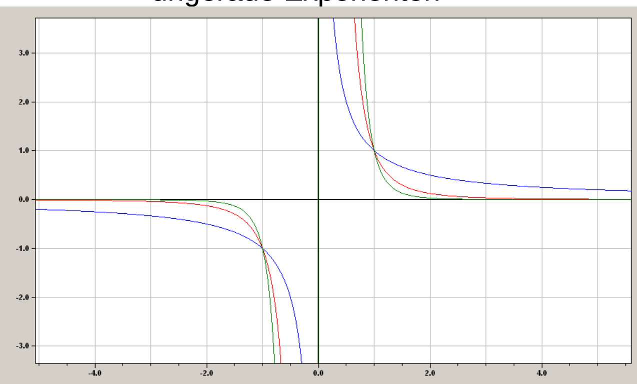


8.2.4. Zusammenstellung von Eigenschaften der Funktionen mit negativem Exponent:

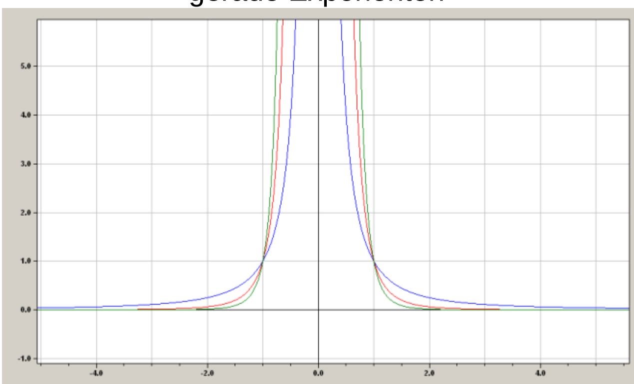
Um einen Überblick zu erhalten, werden diese Funktionen unterteilt in die, deren Exponent gerade bzw. ungerade ist. Und dabei betrachten wir die **Grundtypen** für positive, ganzzahlige (natürliche) Exponenten

$f(x) = x^{-1}$ / $g(x) = x^{-3}$ / $h(x) = x^{-5}$ $f(x) = x^{-2}$ / $g(x) = x^{-4}$/ $h(x) = x^{-6}$

ungerade Exponenten



gerade Exponenten



Eigenschaften:

- ✳ Die Grafen gehen durch (1/1) und (-1/-1).
- ✳ Die Grafen gehen **NICHT** durch den Ursprung.
- ✳ Der Definitionsbereich ist D = R \ { 0 }.
- ✳ Der Wertebereich ist W = R \ { 0 }.
- ✳ Die Grafen sind **punktsymmetrisch** zum Ursprung.
- ✳ Die Grafen **fallen** monoton in den Bereichen der einzelnen Funktionsäste.
- ✳ Je höher der Exponent, desto schneller gehen sie gegen die Asymptote.
- ✳ Die Grafen verschwinden für x < 0 in der Nähe des Pols in die negative Unendlichkeit, kommen für x > 0 aus der positiven Unendlichkeit.
- ✳ Man sagt: **Sie haben einen Pol mit Vorzeichenwechsel.**

- ❁ Grafen gehen durch (1/1) und (+1/-1).
- ❁ Die Grafen gehen **NICHT** durch den Ursprung.
- ❁ Der Definitionsbereich ist D = R \ { 0 }.
- ❁ Der Wertebereich ist W = R^+.
- ❁ Die Grafen sind **y-achsensymmetrisch**.
- ❁ Die Grafen **steigen** für x < 0, sie fallen für x > 0.
- ❁ Je höher der Exponent, desto schneller gehen sie gegen die Asymptote.
- ❁ Die Grafen verschwinden für x < 0 in der Nähe des Pols in die positive Unendlichkeit, kommen für x > 0 aus der positiven Unendlichkeit.
- ❁ Man sagt: **Sie haben einen Pol ohne Vorzeichenwechsel.**

8.3. Bruchgleichungen:

Losgelöst von der algebraischen Frage der Lösung kann man das geometrische Problem so schildern: Wo haben die Grafen der Funktionen $f(x) = \frac{3}{x+4}$ und $g(x) = \frac{1}{x}$ einen gemeinsamen Schnittpunkt bzw. gemeinsame Schnittstellen bzw. schneiden sie sich überhaupt?

Die Lösungsskizze sieht zuerst vor klar zu stellen, welche x-Werte nicht vorkommen dürfen. Dies ist einmal x = -4, da dieser Wert bei f(x) eine Definitionslücke darstellt. Genauso ist dies bei x = 0 bei der Funktion g.

Kommen wir zur algebraischen Lösung:
Es ist bekannt, dass man **zur Ermittlung von Schnittstellen die Funktionsgleichungen gleichsetzen** muss.

$$\frac{3}{x+4} = \frac{1}{x}$$

Bereits mehrmals war der Tipp, den **Kehrwert** zu bilden, um die x-Werte aus dem Nenner in den Zähler zu schreiben:

$$\frac{x+4}{3} = \frac{x}{1} \longrightarrow x + 4 = 3x \longrightarrow 4 = 2x \longrightarrow x = 2 \longrightarrow y = \frac{1}{2} \text{ oder } y = \frac{3}{2+4} = \frac{1}{2}$$

Die beiden Funktionen haben die gemeinsame Schnittstelle $S(2/\frac{1}{2})$. Man muss sich jedoch immer dabei überzeugen, dass der gefundene x-Wert nicht einer der „verbotenen“ Werte ist (hier: $x \neq -4$ und $x \neq 0$)!

Berechne ob bzw. wo die Grafen der Funktionen $f(x) = \frac{3}{x-1}$ und $g(x) = \frac{4}{x+1}$ sich schneiden.

Eine weitere sehr sinnvolle Methode der Berechnung ist die „**Kreuzmultiplikation**“. Man multipliziert über Kreuz den Nenner der einen Seite mit dem Zähler der anderen Seite und umgekehrt.

Das wollen wir hier einmal probieren:

$$\frac{3}{x-1} = \frac{4}{x+1}$$

$$3(x + 1) = 4(x - 1)$$

$$3x + 3 = 4x - 4$$

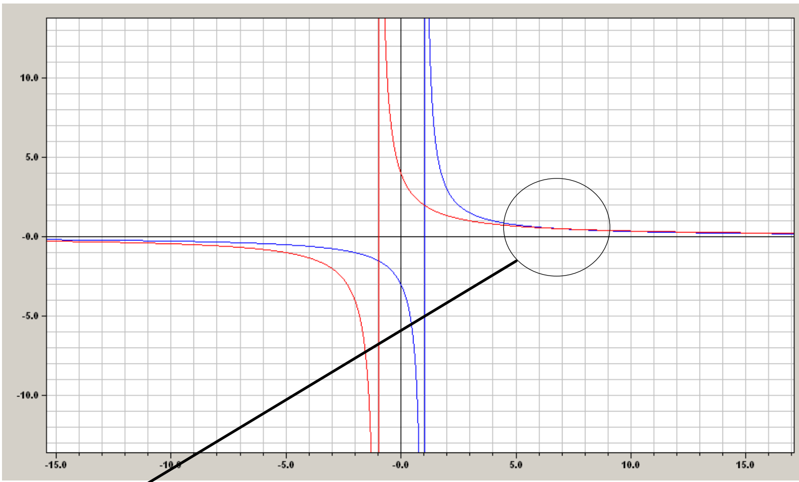
$$-x = -7$$

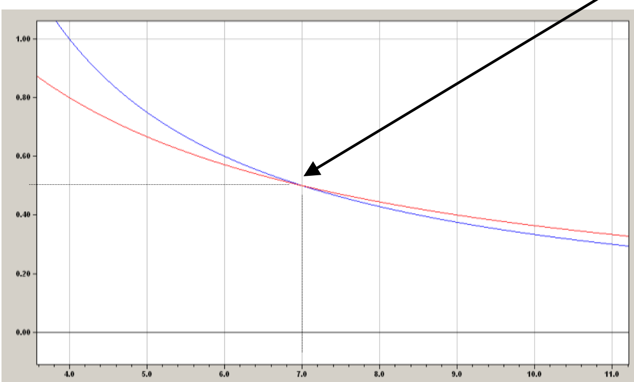
$$x = 7$$

$$y = \frac{3}{7-1} = 0{,}5$$

oder $y = \frac{4}{7+1} = 0{,}5$

$\longrightarrow S(7/0{,}5)$





starke Vergrößerung des relevanten Bereichs

Nach diesen sehr einfachen Bruchgleichungen warten noch problematischere Gleichungen auf unsere Lösung.
So sei hier eine kleine Auswahl gegeben mit den entsprechenden Lösungsskizzen. Auf den Übungsseiten im Additum findet Ihr / finden Sie noch reichlich Übungsmaterial!

Beispiel 1: $\frac{x-3}{x+1} = \frac{x+5}{x+4}$

Bei solch allgemeinen Gleichungen multipliziert man über Kreuz oder (was das Gleiche ist) mit dem Hauptnenner (HN). D.h. hier heißt die Anweisung „| · (x + 1)·(x + 4)“.

$\frac{x-3}{x+1} = \frac{x+5}{x+4}$ | · (x + 1)·(x + 4)

$(x-3)(x+4) = (x+5)(x+1)$

$x^2 + 4x - 3x - 12 = x^2 + x + 5x + 5$

$x - 12 = 6x + 5$

$-5x = 17$

$x = -3{,}4$

eingesetzt: $y = \frac{-3{,}4-3}{-3{,}4+1} = -\frac{8}{3}$

—> $S(-3{,}4/-\frac{8}{3})$

Beispiel 2: $\frac{8}{x^2-25} = \frac{4}{x+5}$

Bei solch allgemeinen Gleichungen multipliziert man stets mit dem Hauptnenner (HN). D.h. hier heißt die Anweisung „| · (x + 5)·(x – 5)“ [3. bin. Formel!!!]

$\frac{8}{x^2-25} = \frac{4}{x+5}$ | · (x + 5)·(x – 5)

$8 = 4(x-5)$

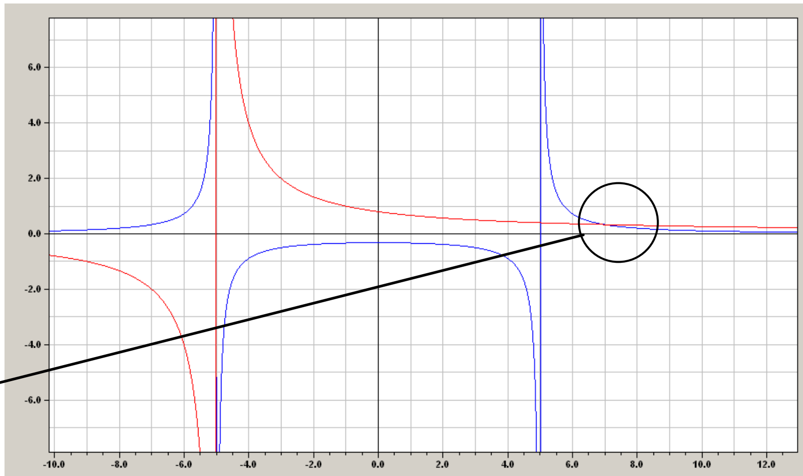
$8 = 4x - 20$

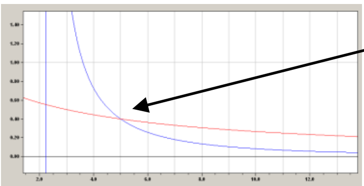
$4x = 28$

$x = 7$

$y = \frac{1}{3}$

—> $S(7/\frac{1}{3})$





Beispiel 3: $\frac{5}{x-3} + \frac{6}{x+5} = \frac{6}{x-5}$

Bei solch allgemeinen Gleichungen multipliziert man stets mit dem Hauptnenner (HN). D.h. hier heißt die Anweisung „| · (x + 5)·(x – 5)·(x – 3)“

$\frac{5}{x-3} + \frac{6}{x+5} = \frac{6}{x-5}$ | · (x + 5)·(x – 5)·(x – 3)

$5(x-5)(x+5) + 6(x-3)(x-5) = 6(x-3)(x+5)$

$5(x^2-25) + 6(x^2-8x+15) = 6(x^2+2x-15)$

$5x^2 - 125 + 6x^2 - 48x + 90 = 6x^2 + 12x - 90$

$5x^2 - 60x + 55 = 0$

$x^2 - 12x + 11 = 0$

$x_{1/2} = 6 \pm 5$ —> $x_1 = 11$ und $x_2 = 1$

Kontrolle durch Einsetzen (meist) erforderlich. *Bitte im Unterricht darauf achten!!!*

für 11: linke Seite: $\frac{5}{11-3}+\frac{6}{11+5} = \frac{5}{8}+\frac{6}{16} = \frac{5}{8}+\frac{3}{8} = 1$

rechte Seite: $\frac{6}{11-5} = 1$ ✓

für 1: linke Seite: $\frac{5}{1-3}+\frac{6}{1+5} = -2{,}5 + 1 = -1{,}5$

rechte Seite: $\frac{6}{1-5} = \frac{6}{-4} = -1{,}5$ ✓

Die Lösung lautet algebraisch: L = { 1 ; 11 } oder geometrisch: $S_1(11/1)$ und $S_2(1/-1{,}5)$

Beispiel 4: $7-\frac{3x+1}{2x-11} = \frac{11x-18}{4x+3}$ SEHR SCHWER!!!

$$7-\frac{3x+1}{2x-11} = \frac{11x-18}{4x+3}$$

$$7(2x-11)(4x+3)-(3x+1)(4x+3)= (11x-18)(2x-11)$$

$$7(8x^2+6x-44x-33)-(12x^2+9x+4x+3) = 22x^2-121x-36x+198$$

$$7(8x^2-38x-33)-(12x^2+13x+3) = 22x^2-157x+198$$

$$56x^2-266x-231-12x^2-13x-3 = 22x^2-157x+198$$

$$22x^2-122x-432 = 0$$

$$x^2-\frac{61}{11}x-\frac{216}{11} = 0$$

$$x_{1/2} = +\frac{61}{22} \pm \sqrt{\frac{3721}{484}-\frac{44\cdot 216}{44\cdot 11}}$$

$$x_{1/2} = +\frac{61}{22} \pm \sqrt{\frac{3721}{484}-\frac{9504}{484}}$$

$$x_{1/2} = +\frac{61}{22} \pm \sqrt{\frac{13225}{484}}$$

$$x_{1/2} = +\frac{61}{22} \pm \frac{115}{22}$$

$$x_1 = +\frac{61}{22} + \frac{115}{22} = 8 \text{ und}$$

$$x_2 = +\frac{61}{22} - \frac{115}{22} = -\frac{27}{11} = -2{,}\overline{45}$$

$$L = \{\, 8 \,;\, -2{,}\overline{45} \,\}$$

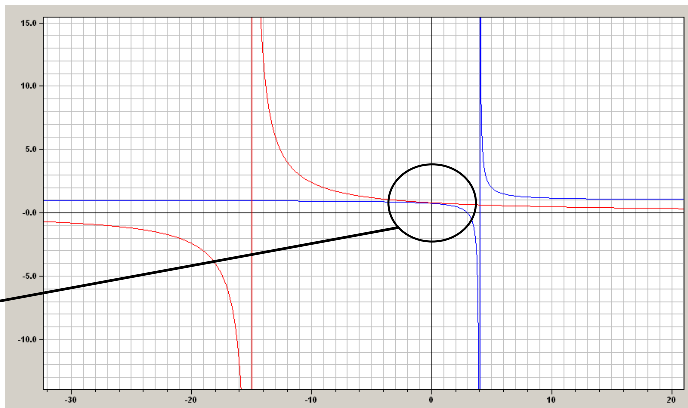
Nicht alle Aufgaben haben eine Lösung, einen Schnittpunkt!

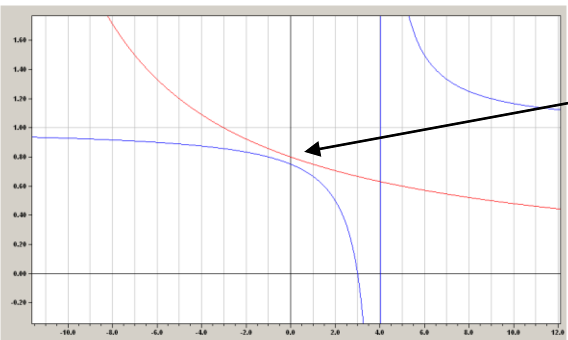
Beispiel 5: $\frac{x-3}{x-4} = \frac{12}{x+15}$

$$(x-3)(x+15) = 12(x-4)$$

$$x^2+12x-45 = 12x-48$$

$$x^2 = -3$$





—> L = { } oder „Es existiert kein Schnittpunkt!“

9. Die Exponentialfunktion:

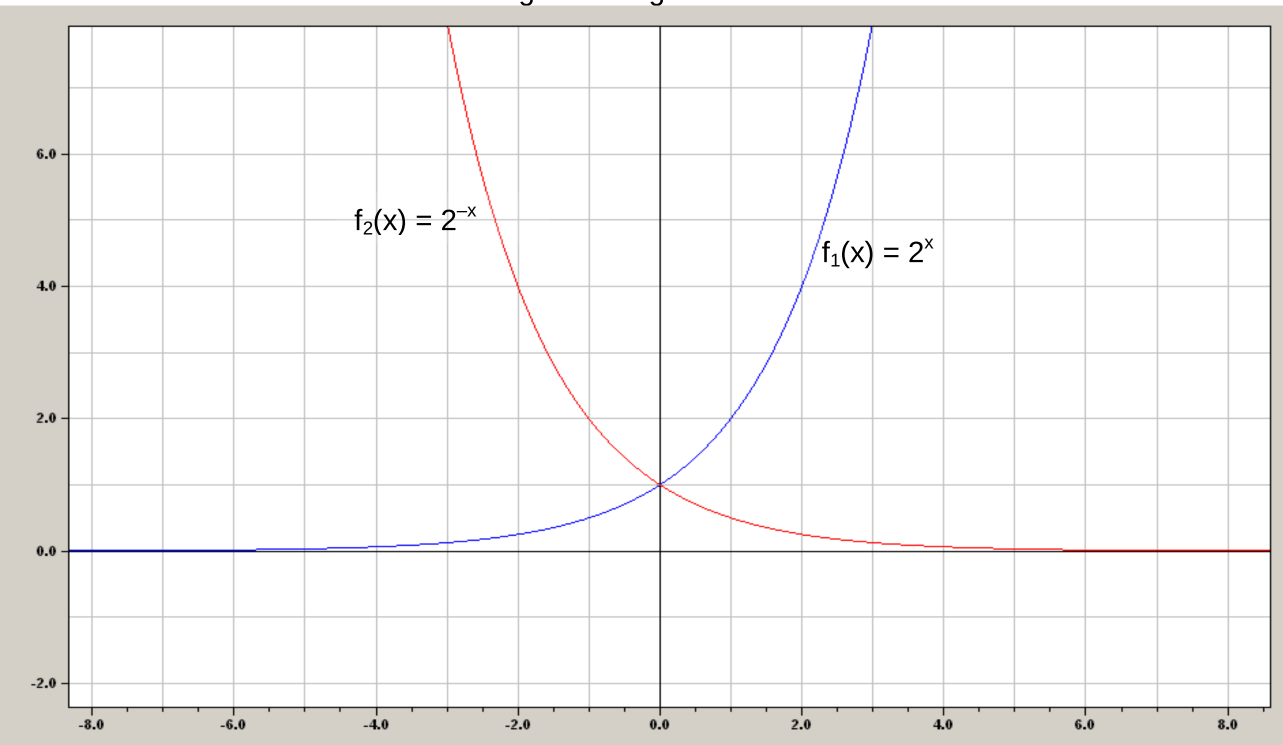
9.1. Einführung / Grundlagen

Eine Funktion der Gleichung $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a \neq 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ nennt man Exponentialfunktion.

Zur Einführung betrachten wir die Exponentialfunktion $f_1(x) = 2^x$, dann auch $f_2(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$:

x	0	1	2	3	–1	–2	–3
$f_1(x)$	1	2	4	8	0,5	0,25	0,125
$f_2(x)$	1	0,5	0,25	0,125	2	4	8

Bereits ohne Bild ist erkennbar, dass bei der ersten Funktion für x gegen +∞ (x—> +∞) die Funktionswerte bis zur Unendlichkeit steigen. Man sagt, dass die Funktion in diesem Bereich **divergiert**[11], bzw. divergent ist. Umgekehrt wird deutlich, dass für x gegen – ∞ (x—> –∞) die Funktionswerte immer kleiner werden, die 0 jedoch nicht erreichen. Man sagt, dass die Funktion in diesem Bereich **konvergiert**[12]bzw. konvergent ist.
Bei der 2. Funktion ist dieses Verhalten genau umgekehrt.



Allgemein formuliert man:

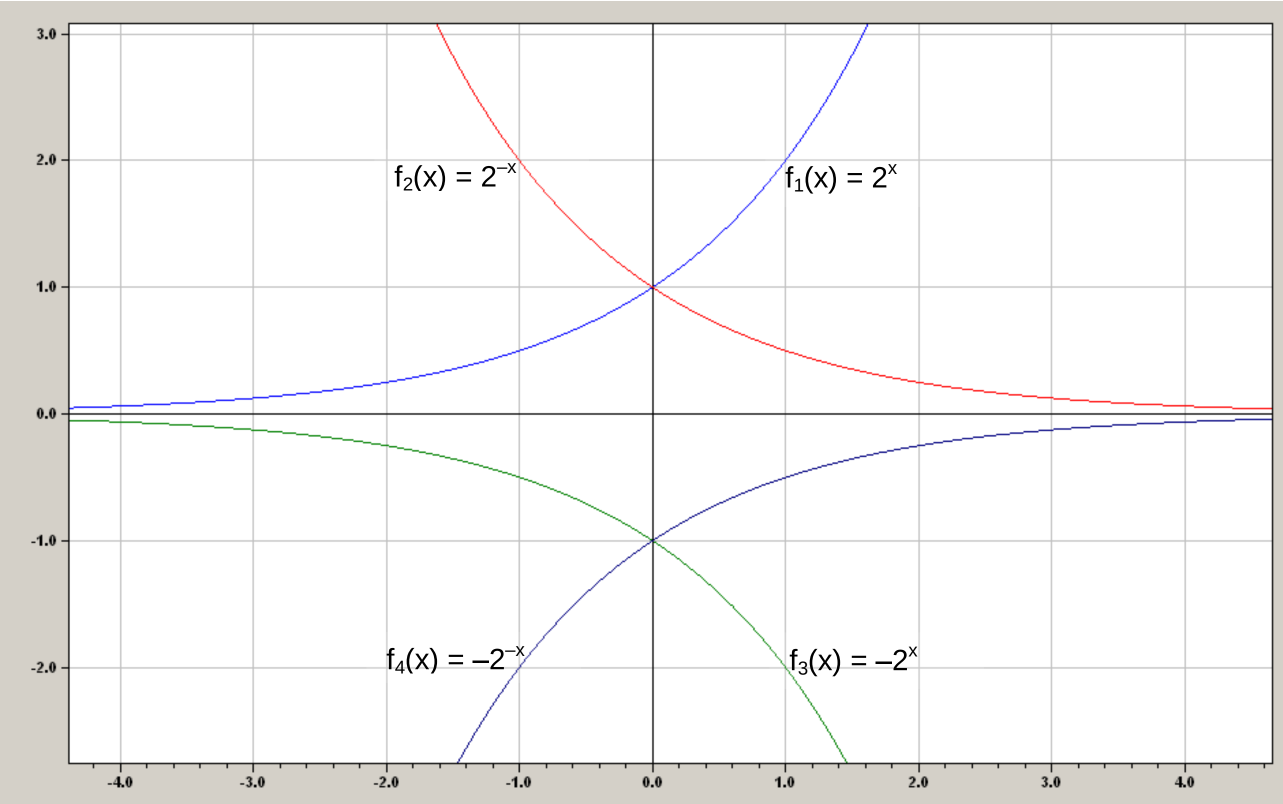
a > 0: f(x) geht näherungsweise gegen 0 für x —> –∞.
Dieses Verhalten nennt man asymptotisch[13].
f(x) geht gegen +∞ für x —> +∞.

0 < a < 1: f(x) geht näherungsweise gegen 0 für x —> +∞.
f(x) geht gegen +∞ für x —> –∞.

---

[11] *lat. divergere = weggerichtet sein, weglaufen*
[12] *lat. convergere = hingewandt sein, hinlaufen*
[13] *griech.: nicht zusammenfallend*

Nun betrachten wir zusätzlich die Exponentialfunktionen $f_3(x) = -2^x$ und $f_4(x) = -2^{-x}$:



Wie gehen die einzelnen Funktionen aus der Funktion $f_1(x) = 2^x$ hervor?

zu $f_2(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$:

Durch das Minuszeichen vor dem x wurde die Funktion f_1 an der y–Achse gespiegelt.

Es gilt:

Ersetzt man das x durch ein –x, so wird die Funktion an der y–Achse gespiegelt.

zu $f_3(x) = -2^x$:

Durch das Minuszeichen vor der gesamten Funktionsvorschrift wurde die Funktion f_1 an der x–Achse gespiegelt.

Es gilt:

Multipliziert man eine Funktion mit –1, so wird die Funktion an der x–Achse gespiegelt.

zu $f_4(x) = -2^{-x}$:

Durch das Minuszeichen vor der gesamten Funktionsvorschrift und dem x wurde die Funktion f_1 an der x– und der y–Achse gespiegelt. Dies entspricht einer Punktspiegelung am Ursprung.

Es gilt:

Multipliziert man eine Funktion mit –1 und ersetzt man das x durch ein –x, so wird die Funktion am Ursprung punktgespiegelt.

9.2. Anwendung der Exponentialfunktion

Eine signifikante Anwendung ist die Zinseszinsrechnung. In der Mittelstufe wurden nach der KIP–Formel ($z = \frac{Kip}{100}$) die Zinsen in i Jahren berechnet, die ein Kapital bei p % erbringt. Ein einfaches Beispiel: Gegeben sind K = 1.000,— €, Verzinsung mit 4% auf 5 Jahre —> $z_5 = \frac{1000 \cdot 5 \cdot 4}{100} = 200$

Das Kapital wäre nach 5 Jahren also 1.200,— €.

Jetzt geht man wirklichkeitsnaher mit der Angelegenheit um, denn schließlich hebt man am jeweiligen Jahresende nicht die Zinsen ab, sondern man lässt sie mit dem Kapital auf dem Konto. So erzielen diese Zinsen wieder Zinsen.

Beispiel einer **allgemeinen** Regelung – Herleitung der **Zinseszinsformel**:

Anfang: $K_0 = K_0$

nach 1 Jahr: $K_1 = K_0 + \frac{K_0 \cdot p}{100}$

$K_1 = K_0 (1 + \frac{p}{100})$

nach 2 Jahren: $K_2 = K_0 (1 + \frac{p}{100}) + K_0 (1 + \frac{p}{100})\frac{p}{100} = K_0 (1 + \frac{p}{100})(1 + \frac{p}{100})$

$K_2 = K_0 (1 + \frac{p}{100})^2$

nach 3 Jahren: $K_3 = K_0 (1 + \frac{p}{100})^2 + K_0 (1 + \frac{p}{100})^2\frac{p}{100} = K_0 (1 + \frac{p}{100})^2(1 + \frac{p}{100})$

$K_3 = K_0 (1 + \frac{p}{100})^3$

nach 4 Jahren: $K_4 = K_0 (1 + \frac{p}{100})^3 + K_0 (1 + \frac{p}{100})^3\frac{p}{100} = K_0 (1 + \frac{p}{100})^3(1 + \frac{p}{100})$

$K_4 = K_0 (1 + \frac{p}{100})^4$

usw.

nach t Jahren: $\boxed{\mathbf{K_t = K_0 (1 + \frac{p}{100})^t}}$ Diese Formel nennt man Zinseszinsformel.

Für das einfache Beispiel anfangs ergibt sich:

Anfang: $K_0 = 1.000$

nach 1 Jahr: $K_1 = 1.000 + \frac{1000 \cdot 4}{100} = 1.040$

nach 2 Jahren: $K_2 = 1.040 + \frac{1040 \cdot 4}{100} = 1.081{,}60$

nach 3 Jahren: $K_3 = 1.081{,}60 + \frac{1081{,}60 \cdot 4}{100} = 1.124{,}864 \approx 1.124{,}86$

nach 4 Jahren: $K_4 = 1.124{,}864 + \frac{1.124{,}864 \cdot 4}{100} = 1.169{,}8582 \approx 1.169{,}86$

nach 5 Jahren: $K_5 = 1.169{,}8582 + \frac{1.169{,}8582 \cdot 4}{100} = 1.216{,}6529 \approx 1.216{,}65$

oder mit der Formel direkt: $K_5 = 1.000(1 + \frac{4}{100})^5 = 1.000 \cdot 1{,}04^5 = 1216{,}6529 \ldots$

Immerhin hat sich die Verzinsung der Zinsen selbst bei der kurzen Zeit bemerkbar gemacht: 16 € mehr auf dem Konto!!!

Wie hoch ist das Kapital nach 20 Jahren bei einer gleichmäßigen Verzinsung von 3% und einem Grundkapital von 2.000,— €?

$$K_{20} = 2.000(1 + \frac{3}{100})^{20} = 2.000 \cdot 1{,}03^{20} = 3.612{,}2224 \approx 3.612{,}22$$

Wann hat sich das Kapital eigentlich verdoppelt?

$$K_{21} = 2.000(1 + \frac{3}{100})^{21} = 3.720{,}5891 \approx \ldots$$

$$K_{22} = 2.000(1 + \frac{3}{100})^{22} = 3.832{,}2067 \approx \ldots$$

$$K_{23} = 2.000(1 + \frac{3}{100})^{23} = 3.947{,}1729 \approx \ldots$$

$$K_{24} = 2.000(1 + \frac{3}{100})^{24} = 4.065{,}5881 \approx \ldots$$

—> Etwa nach 24 Jahren hat sich das Kapital verdoppelt.

Kann man so etwas eigentlich auch rechnerisch ohne Ausprobieren lösen?

Ja, durch Einführung der Funktion:

10. Die Logarithmenfunktion:

10.1. Äquivalenzumformung[14]

Um ein Gefühl für die Logarithmenrechnung zu erhalten, muss zuerst die Äquivalenzumformung geübt werden.

Es gilt stets die Gleichheit folgender Terme:

$$\boxed{\mathbf{a = b^c \longleftrightarrow c = \log_b a \text{ für } b > 0 \text{ und i.A. } b \neq 1.}}$$

Diese Äquivalenzumformung ist eigentlich nichts anderes als die Umkehrung der Exponentialfunktion. Dies wird bei den Grafen noch zu berücksichtigen sein.

Zur Übung:

$2^5 = 32 \longleftrightarrow 5 = \log_2 2$ $\qquad$ $3^2 = 9 \longleftrightarrow 2 = \log_3 9$

$3^{0,5} = \sqrt{3} \longleftrightarrow 0{,}5 = \log_3 \sqrt{3}$ $\qquad$ $3^{0,4} = \sqrt[5]{9} \longleftrightarrow 0{,}4 = \log_3 \sqrt[5]{9}$

$a^0 = 1 \longleftrightarrow \boxed{\mathbf{0 = \log_a 1}}$ $\qquad$ $a^1 = a \longleftrightarrow \boxed{\mathbf{1 = \log_a a}}$

Es gibt zwei besondere Logarithmen.

So kommt die Basis 10 sehr häufig vor. Für diesen Fall hat man definiert: $\boxed{\mathbf{\log_{10} a = \lg a}}$. Dieser lg heißt **dekadischer** Logarithmus

So gilt z.B. lg10 = 1, lg100 = 2, lg1000 = 3 … lg0,1 = –1, lg0,01 = –2; lg0,001 = –3 …

Weiter kommt die Basis e (Eulersche Zahl: 2,718218…) in der Natur sehr häufig vor. Für diesen Fall hat man definiert: $\boxed{\mathbf{\log_e a = \ln a}}$. Dieser ln heißt «logarithmus naturalis» oder **natürlicher** Logarithmus.

Alle Regeln und Gesetze gelten für lg ebenso wie für lg oder allgemein $\log_a$!

---

[14] *lat.: aequs, –a, –um = gleich & valere = bedeuten, heißen —> Äquivalenz = Gleichwertigkeit*

10.2. Die Logarithmengesetze

Aus dem PG 1 entwickelt man durch Anwendung der Äquivalenzschreibweise das 1. Logarithmengesetz.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$= \quad = \quad =$$
$$u \cdot v = w \quad **)$$
$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$
$$m = \log_a u \qquad n = \log_a v \qquad m + n = \log_a w \quad *)$$

*) $m + n = \log_a w$

$\log_a u + \log_a v = \log_a w$

**) $\boxed{\mathbf{\log_a u + \log_a v = loga(u \cdot v)}}$

1. Logarithmengesetz: Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren.

Aus dem PG 2 entwickelt man durch Anwendung der Äquivalenzschreibweise das 2. Logarithmengesetz.

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$= \quad = \quad =$$
$$u : v = w \quad **)$$
$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$
$$m = \log_a u \qquad n = \log_a v \qquad m - n = \log_a w \quad *)$$

*) $m - n = \log_a w$

$\log_a u - \log_a v = \log_a w$

**) $\boxed{\mathbf{\log_a u - \log_a v = loga(u : v)}}$

2. Logarithmengesetz: Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen des Dividenden und des Divisors.

Aus dem Logarithmengesetz 1 entwickelt man das 3. Logarithmengesetz.

$$\log_a u^k = \log_a(\underbrace{u \cdot u \cdot u \cdot u \cdot u \cdot \ldots \cdot u}_{\text{k Faktoren}})$$

$$= \underbrace{\log_a u + \log_a u + \log_a u + \log_a u + \ldots + \log_a u}_{\text{k Summanden}}$$

$\boxed{\mathbf{\log_a u^k = k \cdot \log_a u}}$

3. Logarithmengesetz: Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt des Exponenten mit dem Logarithmen der Basis.

10.3. Die Logarithmusfunktion

Als Umkehrung der allgemeinen Exponentialfunktion f: $y = a \cdot b^x$ wird durch Logarithmieren die Logarithmusfunktion inkl. Verschiebungsanteil (LK):

$y = a \cdot b^x \longrightarrow x = a \cdot b^y \;\Big|\; \log_b \longrightarrow \log_b x = \log_b(a \cdot b^y) \longrightarrow \log_b x = \log_b a + \log_b b^y$

$\longrightarrow \log_b x = \log_b a + y \cdot \log_b b \longrightarrow y \cdot \log_b b = \log_b x - \log_b a$

$\longrightarrow \mathbf{f^{-1}: y = \log_b x - \log_b a}$

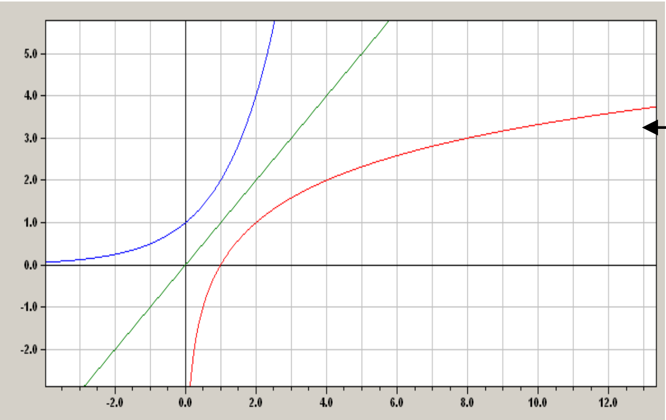
Als Umkehrung der Exponentialfunktion f: $y = b^x$ wird durch Logarithmieren die Logarithmusfunktion /(GK):

$y = b^x$ —> $x = b^y$ | $\log_b$ —> $\log_b x = \log_b b^y$ —> $\log_b x = y \cdot \log_b b$

—> **f^{-1}: $y = \log_b x$**

Wie sehen die Grafen aus?

f: $y = 2^x$



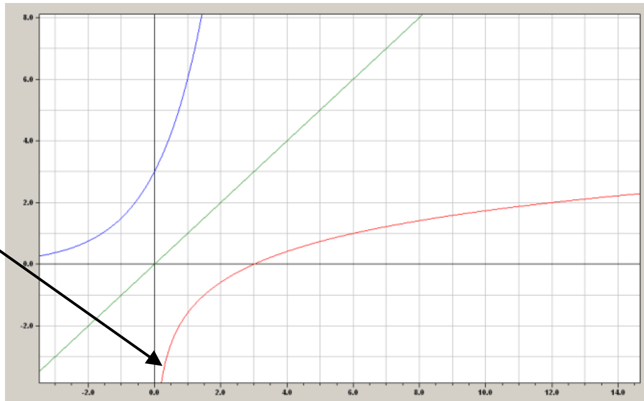
Am Beispiel der Exponentialfunktion f: $y = 2^x$ entwickeln wir die Logarithmusfunktion

f^{-1}: $y = \log_2 x$

bildlich durch Spiegelung.

Deutlich sieht man, dass **$0 = \log_a 1$** und auch **$1 = \log_a a$** im Grafen bestätigt wird.

f: $y = 3 \cdot 2^x$



Am Beispiel der Exponentialfunktion f: $y = 3 \cdot 2^x$ entwickeln wir die Logarithmusfunktion

f^{-1}: $y = \log_2 x - \log_2 3$

bildlich durch Spiegelung.

Weitere Übungen siehe GK/LK 11/12.

10.4. Lösung von Exponentialgleichungen

Nachdem wir bereits die ersten Exponentialgleichungen gelöst haben in 9.2., gehen wir nun zu folgenden einfachen Gleichungen über:

$2^{2x+1} = 8$	$2^{2x+1} = 2^3$	$2x+1 = 3$	$x = 1$
$3^{4x-1} = \sqrt{27}$	$3^{4x-1} = 3^{\frac{3}{2}}$	$4x-1 = 1{,}5$	$x = 0{,}625$
$5 \cdot 0{,}2^x = 0{,}2$	$5 \cdot 5^{-x} = 5^{-1}$	$5 = 5^{x-1}$	$x = 2$

Nun schließen sich schwerere an:

Beispiel 1: $2^x \cdot 4^{x-3} = 8^{2-x}$ **zuerst einmal ohne Logarithmen, denn 2, 4, 8 sind verwandt!!!**

$2^x \cdot (2^2)^{x-3} = (2^3)^{2-x}$

$2^x \cdot 2^{2x-6} = 2^{6-3x}$

$2^{3x-6} = 2^{6-3x}$ Im Verfahren des Exponentenvergleichs (bei gleicher Basis!) —>

$3x-6 = 6-3x$

$6x = 12$

$x = 2$

Beispiel 1: Jetzt einmal mit Logarithmen:

$$2^x \cdot 4^{x-3} = 8^{2-x} \quad | \text{ lg oder ln}$$
$$\lg(2^x \cdot 4^{x-3}) = \lg 8^{2-x}$$
$$\lg 2^x + \lg 4^{x-3} = \lg 8^{2-x}$$
$$x\lg 2 + (x-3)\lg 4 = (2-x)\lg 8$$
$$x\lg 2 + x\lg 4 - 3\lg 4 = 2\lg 8 - x\lg 8$$
$$x\lg 2 + x\lg 4 + x\lg 8 = 2\lg 8 + 3\lg 4$$
$$x(\lg 2 + \lg 4 + \lg 8) = 2\lg 8 + 3\lg 4$$
$$x = \frac{2\lg 8 + 3\lg 4}{\lg 2 + \lg 4 + \lg 8} = \frac{2\lg 2^3 + 3\lg 2^2}{\lg 2 + \lg 2^2 + \lg 2^3} = \frac{6\lg 2 + 6\lg 2}{\lg 2 + 2\lg 2 + 3\lg 2}$$
$$= \frac{12\lg 2}{6\lg 2} = \frac{12}{6} = 2$$

Dieser offenbar recht komplizierte Rechenweg wird bei anderen Aufgaben leider unumgänglich sein:

Beispiel 2:

$$2^{x-3} \cdot 3^{2-x} = 5^{3-2x} \quad | \text{ lg oder ln}$$
$$\lg(2^{x-3} \cdot 3^{2-x}) = \lg 5^{3-2x}$$
$$\lg 2^{x-3} + \lg 3^{2-x} = \lg 5^{3-2x}$$
$$(x-3)\lg 2 + (2-x)\lg 3 = (3-2x)\lg 5$$
$$x\lg 2 - 3\lg 2 + 2\lg 3 - x\lg 3 = 3\lg 5 - 2x\lg 5$$
$$x\lg 2 - x\lg 3 + 2x\lg 5 = 3\lg 5 + 3\lg 2 - 2\lg 3$$
$$x(\lg 2 - \lg 3 + 2\lg 5) = 3\lg 5 + 3\lg 2 - 2\lg 3$$
$$x = \frac{3\lg 5 + 3\lg 2 - 2\lg 3}{\lg 2 - \lg 3 + 2\lg 5} \approx 1{,}6743132$$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung ergibt: $0{,}3989592 \cdot 1{,}4301846 = 0{,}5705853$

bzw.: $0{,}5705853 = 0{,}5705853$ ✓

10.5. Lösung von (schwereren) Exponentialgleichungen

Erinnerst Du Dich? „Etwa nach 24 Jahren hat sich das Kapital verdoppelt. Kann man so etwas eigentlich auch rechnerisch ohne Ausprobieren lösen? Ja, durch Einführung der … „

Jetzt ist es soweit!

Wann hat sich ein Kapital bei einer gleichmäßigen Verzinsung von 3% und einem Grundkapital von 2.000,— € verdoppelt?

$$4.000 = 2.000 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^t$$

$$\rightarrow 2 = 1{,}03^t$$

Hier ist sichtbar, dass das Kapital selbst keine Rolle spielt! Probiere es mit 30.000€, mit 1.234.564€ …

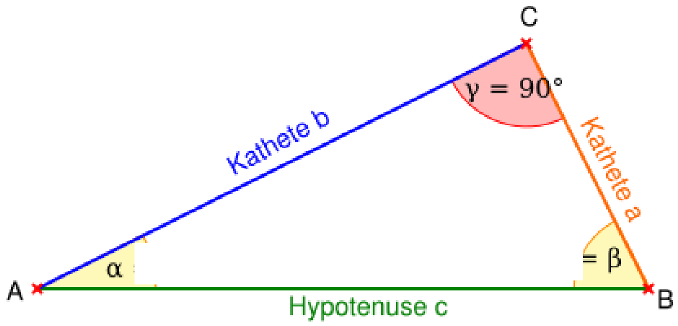
$$\lg 2 = \lg 1{,}03^t$$
$$\lg 2 = t \cdot \lg 1{,}03$$
$$t = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}03} = 23{,}449772 \approx 23 \text{ Jahre } 5 \text{ Monate } 12 \text{ Banktage}$$

Wann hat man 50% mehr Kapital als am Anfang bei einer gleichmäßigen Verzinsung von 4% und einem beliebigen Grundkapital?

$$1{,}5K_0 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^t$$
$$1{,}5 = 1{,}04^t$$
$$\lg 1{,}5 = \lg 1{,}04^t$$
$$\lg 1{,}5 = t \cdot \lg 1{,}04$$
$$t = \frac{\lg 1{,}5}{\lg 1{,}04} = 10{,}338035 \approx \text{10 Jahre 4 Monate 2 Banktage}$$

11. Die trigonometrischen Funktion:

11.1. Definitionen im pythagoräischen Dreieck



Es ist definiert:

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}} = \frac{a}{c} \longrightarrow a = c \cdot \sin\alpha$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}} = \frac{b}{c} \longrightarrow b = c \cdot \cos\alpha$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}} = \frac{a}{b}$$

$$\boxed{\text{ctg}\,\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}} = \frac{b}{a}$$

11.2 Folgerung aus den Definitionen

$$\tan\alpha = \frac{c \cdot \sin\alpha}{c \cdot \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \longrightarrow \boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$\boxed{\text{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}}$$

$$\boxed{\text{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Die wichtigste Folgerung ist der „trigonometrische Pythagoras“, der sich aus dem Pythagoras herleitet:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Wir setzen ein: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ bzw. $\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

11.3 Bogenmaß (RAD)

Winkel werden normalerweise in Grad (DEG ≡ Deutsche Einheitsgrade) angegeben. Aber es ist auch üblich, die Winkel in ein Bogenmaß umzurechnen. Der Einheitskreis mit dem Radius 1 LE (Längeneinheit) hat den Umfang $2\pi \cdot 1 = 2\pi$. Man setzt nun diesen Umfang gleich dem Radius, um einmal den gesamten Einheitskreis zu durchlaufen, also 360°. So erhält man:

$$\boxed{360° = 2\pi} \text{ bzw. } \boxed{\pi = 180°}$$

$$\boxed{1° = \frac{\pi}{180}}$$

11.4 Wertetabelle wichtiger Winkelwerte

45°–Winkel kommen in Quadraten vor, wenn die Diagonale ($a\sqrt{2}$) die rechten Winkel halbiert. 60°–Winkel kommen in gleichseitigen Dreiecken vor, deren Höhe den Wert $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ hat. Andererseits halbiert die Höhe den anderen Winkel (30°). Aus diesen Figuren ergibt sich die folgende Tabelle:

DEG	0°	30°	45°	60°	90°
RAD	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosx	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tanx	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.

So kann man sich die Tabelle leichter merken (Eselsbrücke!):

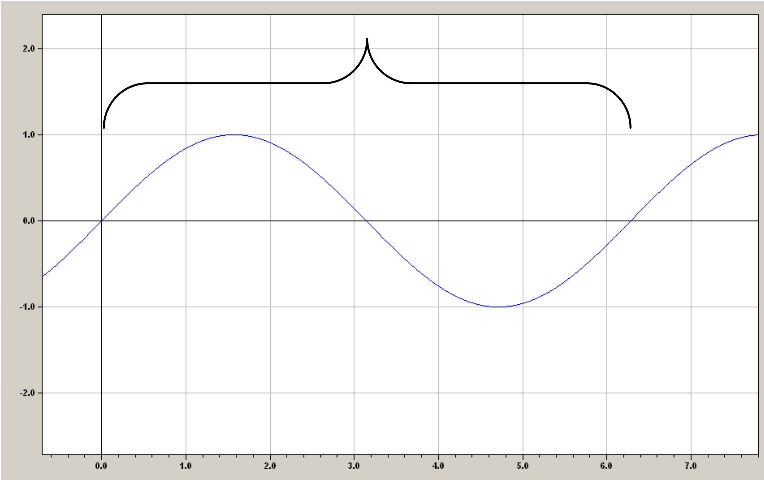
DEG	0°	30°	45°	60°	90°
sinx	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$

Den Rest merkt man sich auch mithilfe „$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$“.

11.5 Funktionsgrafen im Kurzdurchlauf

Periode 2π

f(x) = sinx

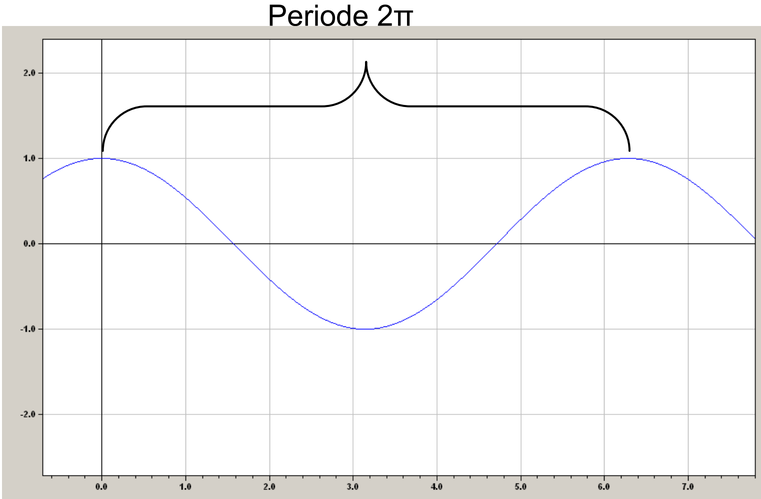


maximal +1

minimal –1

Periode 2π

f(x) = cosx

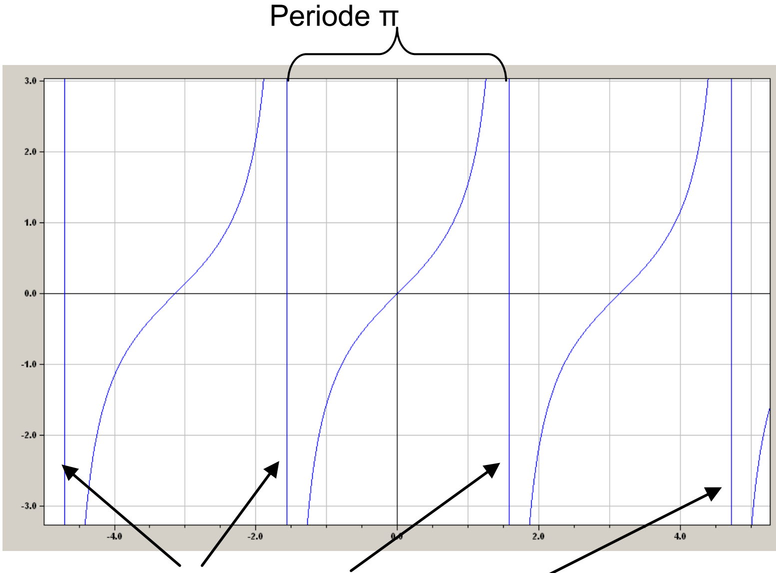


maximal +1

minimal –1

Periode π

f(x) = tanx



Definitionslücken (Unendlichkeitsstellen)

Viel Erfolg in der MSS unseres Gymnasiums!!!

Übungen zur Äquivalenzschreibweise:

Berechne die Variablen bzw. Terme bzw. Gleichungen:

1. (a) $2^x = \frac{1}{\sqrt[3]{16}}$ (c) $4^x = 1$ (e) $3^x = \sqrt[3]{9}$

   (b) $5^x = \sqrt[5]{25}$ (d) $5^x = \frac{1}{125}$ (f) $3^x = 81$

2. $\log_2 64$ / $\log_2 1024$ / $\log_2 0{,}125$ / $\log_2 \frac{1}{128}$ / $\log_2 \sqrt{2}$

3. $\lg 100$ / $\lg 10$ / $\lg 0{,}01$ / $\lg 0{,}0001$ / $\lg 10^9$

4. $\log_2 \sqrt[3]{32}$ / $\log_2 \sqrt[5]{128}$ / $\log_2 \sqrt[4]{8}$ / $\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{16}}$

5. $\log_a a^m$ / $\log_a \frac{1}{a}$ / $\log_a \sqrt[m]{a}$ / $\log_a (-1)$

6. (a) $\log_2 y = 5$ (b) $\lg y = 6$ (c) $\log_4 y = 0{,}5$ (d) $\lg y = 1$

7. (a) $\log_2 (x - 1) = 2$ (b) $\log_5 (4x + 1) = 1$ (c) $\log_2 x < 5$

Alle mögliche Lösungen der o.a. Aufgaben sind <u>ohne</u> Betrachtung der Reihenfolge:

$\frac{2}{3}$	0,4	6	10	2	1
5	32	2	m	-1	$\frac{5}{3}$
1,4	-3	$-\frac{4}{3}$	0	0,5	-3
9	-4	n.d.	$-\frac{4}{3}$	0,75	$\frac{1}{m}$
1 Mio	1	-7	$0 < x < 32$	10	-2
			4		

Die Lösungen inkl. Lösungswege befinden sich auf Seite 57!

Lösungen zur Äquivalenzschreibweise:

Berechne die Variablen bzw. Terme bzw. Gleichungen:

1. (a)	$2^x = \frac{1}{\sqrt[3]{16}}$	$2^x = 16^{-1/3}$	$2^x = 2^{-4/3}$	$x = -\frac{4}{3}$
(b)	$5^x = \sqrt[5]{25}$	$5^x = 25^{1/5}$	$5^x = 5^{2/5}$	$x = \frac{2}{5} = 0{,}4$
(c)	$5^x = \frac{1}{125}$	$5^x = 125^{-1}$	$5^x = 5^{-3}$	$x = -3$
(d)	$3^x = \sqrt[3]{9}$	$3^x = 9^{\frac{1}{3}}$	$3^x = 3^{\frac{2}{3}}$	$x = \frac{2}{3}$
(e)	$3^x = 81$	$3^x = 3^4$	$x = 4$	
(f)	$4x = 1$	$4^x = 4^0$	$x = 0$	

2.	$\log_2 64 = x$	$2^x = 64 = 2^6$	$x = 6$
	$\log_2 1024 = x$	$2^x = 1024 = 2^{10}$	$x = 10$
	$\log_2 0{,}125 = x$	$2^x = 0{,}125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$	$x = -3$
	$\log_2 \frac{1}{128} = x$	$2^x = \frac{1}{128} = 2^{-7}$	$x = -7$
	$\log_2 \sqrt{2} = x$	$2^x = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$	$x = 0{,}5$
3.	$\lg 100 = x$	$10^x = 100 = 10^2$	$x = 2$
	$\lg 10 = x$	$10^x = 10$	$x = 1$
	$\lg 0{,}01 = x$	$10^x = 0{,}01 = 10^{-2}$	$x = -2$
	$\lg 0{,}0001 = x$	$10^x = 10^{-4}$	$x = -4$
	$\lg 10^9 = x$	$10^x = 10^9$	$x = 9$
4.	$\log_2 \sqrt[3]{32} = x$	$2^x = \sqrt[3]{32} = 2^{\frac{5}{3}}$	$x = \frac{5}{3}$
	$\log_2 \sqrt[5]{128} = x$	$2^x = \sqrt[5]{128} = 2^{\frac{7}{5}}$	$x = 1{,}4$
	$\log_2 \sqrt[4]{8} = x$	$2^x = \sqrt[4]{8} = 2^{3/4}$	$x = 0{,}75$
	$\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{16}} = x$	$2^x = \frac{1}{\sqrt[3]{16}} = 2^{-4/3}$	$x = -\frac{4}{3}$
5.	$\log_a a^m = x$	$a^x = a^m$	$x = m$
	$\log_a \frac{1}{a} = x$	$a^x = a^{-1}$	$x = -1$
	$\log_a \sqrt[m]{a} = x$	$a^x = a^{1/m}$	$x = \frac{1}{m}$
	$\log_a (-1) = x$	$a^x = -1$	x = nicht definiert (n.d.)

6. (a)	$\log_2 y = 5$	$2^5 = y$	$y = 32$
(b)	$\lg y = 6$	$10^6 = y$	y = 1.000.000 = 1 Mio
(c)	$\log_4 y = 0{,}5$	$4^{1/2} = y$	$y = 2$
(d)	$\lg y = 1$	$10^1 = y$	$y = 10$

7. (a)	$\log_2 (x - 1) = 2$	$2^2 = x - 1$	$x = 5$	[inkl. $x > 1$]
(b)	$\log_5 (4x + 1) = 1$	$5^1 = 4x + 1$	$x = 1$	[inkl. $x > -\frac{1}{4}$]
(c)	$\log_2 x < 5$	$x < 2^5 = 32$	[inkl. $x > 0$]	

Lernerfolgskontrolle 1: Termumformungen

1. Fülle die Tabelle aus:

gegebener Term	Summenterm	Differenzterm	Produktterm	Quotiententerm
$3x + 15y + 6x$	$= 3x + 15y + 6x$ oder $= 9x + 15y$	$= 3x - (-15y - 6x)$ oder $= 9x - (-15y)$	$3\cdot(x + 5y + 12x)$ oder = _______________	$(3x^2 + 15xy + 6^2x):x$ oder = _______________
$8x - 4x + 96x$	$= 8x - 4x + 96x$ oder $= 96x + 4x$	$= 8x - 4x + 96x$ oder $= 104x - 4x$	$= 100\cdot x$ oder = _______________	$= 100x^2 : x$ oder = ______-________

2. Löse die Klammern auf. Rechne soweit wie möglich (vereinfachend) aus:

2.1. $(3x + 5y - 2z) + (4x - 3y + 8z) = ?$

LÖSUNG: $3x + 5y - 2z + 4x - 3y + 8z = 7x + 2y + 6z$

2.2. $6a^2 + (4b^2 - 6a^2 + 4c^2) - (12a^2 - c^2) = ?$

LÖSUNG: $-12a^2 + 4b^2 + 5c^2 = +4b^2 - 12a^2 + 5c^2$

2.3. $2{,}1 \cdot (4x - 3y) + 5{,}3 \cdot (5x + 10y) = ?$

LÖSUNG: $8{,}4x - 6{,}3y + 26{,}5x + 53y = \underline{34{,}9x + 46{,}7y}$

2.4. $(-5)\cdot[25\cdot(x + y) + 10] + (-3)\cdot(2x - 5y) = ?$

LÖSUNG: $= (-5)\cdot(25x + 25y + 10) - 6x + 15y$
$= -125x - 125y - 50 - 6x + 15y$
$= -131x - 110y - 50$

3. Multipliziere und fasse zusammen:

3.1. $(1{,}5z + 7w)(1{,}9z - 9w) = ?$

LÖSUNG: $= 2{,}85z^2 + 13{,}3zw - 13{,}5wz - 63w^2$
$= \underline{2{,}85z^2 - 0{,}2wz - 63w^2}$

3.2. $(0{,}32p - 0{,}5t)(0{,}5p + 0{,}7t) = ?$

LÖSUNG: $= 0{,}16p^2 + 0{,}224pt - 0{,}25tp - 0{,}35t^2$
$= 0{,}16p^2 - 0{,}026pt - 0{,}35t^2$

Lernerfolgskontrolle 2: Gleichungen

1. Löse folgende Gleichungssysteme …

1.1. mithilfe des Einsetzungsverfahrens:

$3x + 4y = 7$

$\underline{6x - \ \ y = 32}$

$\boxed{\text{Lsg}}$.: $3x + 4y = 7$

$\underline{y = 6x - 32}$ *)

$3x + 4(6x - 32) = 7$

$3x + 24x - 128 = 7$

$27x = 135$

$x = 5$

in *) $y = -2$

➔ **L = { (5/ –2) }**

1.2. mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens

$7x + 32y = 13$

$\underline{9x + 8y = 83}$ $\mid \cdot 4$

$\boxed{\text{Lsg}}$.: $32y = 13 - 7x$

$\underline{32y = 332 - 36y}$

$13 - 7x = 332 - 36y$

$29x = 319$

$x = 11$

in I oder II: $32y = 13 - 7 \cdot 11$

$y = -2$

➔ **L = { (11/ –2) }**

1.3. mithilfe des Additionsverfahrens:

$1{,}8x + 2{,}4y = 8{,}4 \quad \mid : 0{,}6$

$\underline{3{,}2x - 3{,}6y = -24{,}4} \quad \mid : 0{,}4$

$\boxed{\text{Lsg}}$.: $3x + 4y = 14 \quad \mid \cdot 9$

$\underline{8x - 9y = -61} \quad \mid \cdot 4$

$27x + 36y = 126$

$\underline{32x - 36y = -244}$

$59x = -118$

$x = 2$

….. $y = 5$

➔ **L = { (–2/ 5) }**

1.4. grafisch

$2x - y = 5$

$\underline{4x = 2y + 10}$

$\boxed{\text{Lsg}}$.: $y = 2x - 5$

$\underline{y = 2x - 5}$

Geraden liegen aufeinander!

Es gibt unendlich viele Schnittpunkte.

➔ **L = { (x/y) | y = 2x – 5 }**

2. Löse folgende Gleichungssysteme nach dem Verfahren, das Dir am günstigsten erscheint (Grundmenge ist QxQ) und gib die Lösungsmenge an.

2.1.

$3x + 11y = 35 \quad \mid \cdot(-4)$

$\underline{9y + 4x = 24} \quad \mid \cdot 3$

$-12x - 44y = -140 \quad \mid \cdot(-4)$

$\underline{12x + 27y = 72}$

$-17y = -68$

$y = 4$

$x = -3$

➔ **L = { (–3/ 4) }**

2.2.

$10(x + 3) - (y + 5) = 99$

$\underline{8(x - 4) - 3(y - 9) = 41}$

$10x - y = 99 - 30 + 5$

$\underline{8x - 3y = 41 + 32 - 27}$

$10x - y = 74$

$\underline{8x - 3y = 46}$

$10x - 74 = y$

in II.: $8x - 3(10x - 74) = 46$

$8x - 30x + 222 = 46$

) $-22x = -176$

$x = 8$

$y = 6$

➔ **L = { (8/ 6) }**

Lernerfolgskontrolle 3: Wurzelterme

1. Fasse so weit wie möglich zusammen, verwende auch das teilweise Radizieren!

1.1. $3\sqrt{5} - 7\sqrt{8} + 3\sqrt{8} + 9\sqrt{5} = 12\sqrt{5} - 4\sqrt{8} = 12\sqrt{5} - 8\sqrt{2}$

1.2. $\sqrt{112} + \sqrt{175} - \sqrt{252} + \sqrt{63} = 4\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 6\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 6\sqrt{7}$

2. Berechne bzw. vereinfache die folgenden Terme optimal!

2.1. $3\sqrt{5} - 7\sqrt{8} + 3\sqrt{8} + 9\sqrt{5} = 12\sqrt{5} - 4\sqrt{8} = 12\sqrt{5} - 8\sqrt{2}$

2.2. $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{27x} = \sqrt{2x6 \cdot 27x} = 18x$

2.3. $(\sqrt{1280} - \sqrt{245} - \sqrt{605}) : \sqrt{5} = \sqrt{256} - \sqrt{49} - \sqrt{121} = 16 - 7 - 11 = -2$

2.4. $\sqrt{1\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{3\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1 \cdot 27}{2 \cdot 4 \cdot 8}} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8} = 1{,}125$

2.5. $\frac{\sqrt{64x^2 - 484y^2}}{\sqrt{8x + 22y}} = \sqrt{\frac{(8x + 22y)(8x - 22y)}{8x + 22y}} = \sqrt{8x - 22y}$

2.6. $\sqrt{169x^2 - 78x + 9} = \sqrt{(13x - 3)^2} = |\ 13x - 3\ | = 13x - 3$, wenn $x > \frac{3}{13}$

$= 3 - 13x$, wenn $x < \frac{3}{13}$

2.7. $\frac{\sqrt{5x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}(\sqrt{5} - 1) + (\sqrt{32} - \sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{x}} + (4\sqrt{2} - \sqrt{2})^2$

$= (5 - 1) + (3\sqrt{2})^2 = 4 + 18 = 22$

3. Mache den Nenner rational und vereinfache optimal!

3.1. $\frac{18}{4\sqrt{3}} = \frac{18}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{12} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

3.2. $\frac{\sqrt{20} - \sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{10} - \sqrt{5} = \sqrt{5}(\sqrt{2} - 1)$

3.3. $\frac{18}{\sqrt{14} - \sqrt{5}} = \frac{18}{\sqrt{14} - \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{14} + \sqrt{5}}{\sqrt{14} + \sqrt{5}} = \frac{18(\sqrt{14} + \sqrt{5})}{14 - 5} = 2(\sqrt{14} + \sqrt{5})$

3.4. $\frac{75}{\sqrt{245} + \sqrt{320}} = \frac{75}{\sqrt{5}(\sqrt{49} + \sqrt{64})} = \frac{75}{\sqrt{5}(+15)} = \frac{5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

Lernerfolgskontrolle 4: Wurzelgleichungen

1. Löse die Wurzelgleichungen nach dem „Rezept“ (① … ⑩).

1.1. $2 + \sqrt{148 - 8x} = 2x$

1.2. $\sqrt{x} = 7 + \sqrt{x + 7}$

1.3. $\sqrt{x} = 7 - \sqrt{x + 7}$

2. Löse die Wurzelgleichungen in Eigenstudium!

2.1. $\sqrt{x - 1} = \sqrt{3 - x}$ —> L = { 2 }

2.2. $\sqrt{x - 3} + \sqrt{2x + 1} = \sqrt{5x + 4}$ —> $x^2 - 11x - 12 = 0$ —> $x_1 = 12$; $x_2 = -1$ —> L = { 12 }

2.3. $\sqrt{13x - 1} - \sqrt{5x} = \sqrt{x + 4}$ —> $29x^2 - 150x + 25 = 0$ —> $x_1 = 5$; $x_2 = \frac{5}{29}$ —> L = { 5 }

Bemerkung zur 2. Probe bei 2.3.: Ergebniszeile lautet: „$6\sqrt{\frac{1}{29}} - 5\sqrt{\frac{1}{29}} = 11\sqrt{\frac{1}{29}}$“ !!!

Lösungen der Wurzelgleichungen:

zu 1.1.:

$2 + \sqrt{148 - 8x} = 2x$

D: $148 - 8x \geq 0$ —> $x \leq 16$

$\sqrt{148 - 8x} = 2x - 2$

$148 - 8x = 4x^2 - 8x + 4$

$4x^2 = 144$

$x^2 = 36$

$x_{1/2} = \pm 6$

Probe: $\sqrt{148 - 8 \cdot 6} = 2 \quad 6 - 2$ ✓

Probe: $\sqrt{148 + 8 \cdot 6} = -2 \quad 6 - 2$ f.A.

L = { +6 }

zu 1.2.

$\sqrt{x} = 7 + \sqrt{x + 7}$

D: x ≥ = und x ≥ 7 —> x ≥ 7

$\sqrt{x} - \sqrt{x + 7} = 7$

$x - 2\sqrt{x(x + 7)} + x + 7 = 49$

$-\sqrt{x}\,\sqrt{x + 7} = 21 - x$

$\sqrt{x}\,\sqrt{x + 7} = x - 21$

$x(x + 7) = x^2 - 42x + 441$

$7x = 441 - 42x$

$49x = 441$

$x = 9$

Probe: $\sqrt{9} = 7 + \sqrt{16}$ f.A.

L = { }

zu 1.3.

$\sqrt{x} = 7 - \sqrt{x + 7}$

D: x ≥ = und x ≥ 7 —> x ≥ 7

$\sqrt{x} + \sqrt{x + 7} = 7$

$x + 2\sqrt{x(x + 7)} + x + 7 = 49$

$\sqrt{x}\,\sqrt{x + 7} = 21 - x$

siehe 1.2.: $x = 9$

Probe: $\sqrt{9} = 7 - \sqrt{16}$ ✓

L = { 9 }

Lernerfolgskontrolle 5: Gleichungen mit einer Unbekannten

1. Löse mit der Grundmenge R!

1.1. $\frac{1}{2}(12x + 0{,}8) - \frac{1}{3}(21x - 0{,}9) = \frac{1}{4}(28x - 2)$

$$6x + 0{,}4 - 7x + 0{,}3 = 7x - 0{,}5$$
$$-x + 0{,}7 = 7x - 0{,}5$$
$$-8x = -1{,}2$$
$$x = 0{,}15 \Rightarrow L = \{ 0{,}15 \}$$

1.2. $3(x + \frac{1}{2}) - 4(x - \frac{1}{4}) = 5(x - \frac{3}{4})$

$$3x + 1{,}5 - 4x + 1 = 5x - 3{,}75$$
$$-x + 2{,}5 = 5x - 3{,}75$$
$$-6x = -6{,}25$$
$$x = \frac{6{,}25}{6} = \frac{25}{24} = 1\frac{1}{24} \Rightarrow L = \{ \frac{1}{24} \}$$

2. Löse mit der Grundmenge Q!

2.1. $4(f - 1)^2 + 31 = 4f^2 + 34$

$$4(f^2 - 2f + 1) + 31 = 4f^2 + 34$$
$$4f^2 - 8f + 4 + 31 = 4f^2 + 34$$
$$-8f = -1$$
$$f = 0{,}125 \Rightarrow L = \{ 0{,}125 \}$$

2.2. $x^3 - x^2 = 0$

$$x^2(x - 1) = 0$$

Entweder ist $x^2 = 0$ und/oder $x - 1 = 0$

d.h.: $x \cdot x = 0$ und/oder $x - 1 = 0$

$x_{1/2} = 0$ und/oder $x = 1$

$\Rightarrow L = \{ 0 ; 1 \}$

3. Löse mit der Grundmenge N!

3.1. $4(f - 1)^2 + 38 = 4f^2 + 34$ (vgl. 2.1.)

$$4(f^2 - 2f + 1) + 38 = 4f^2 + 34$$
$$4f^2 - 8f + 4 + 38 = 4f^2 + 34$$
$$-8f = -8$$
$$f = 1 \Rightarrow L = \{ 1 \}$$

3.2. $4(f - 1)^2 + 40 = 4f^2 + 34$ (vgl. 2.1.)

$$4(f^2 - 2f + 1) + 40 = 4f^2 + 34$$
$$4f^2 - 8f + 4 + 40 = 4f^2 + 34$$
$$-8f = -10$$

$f = 1{,}25 \Rightarrow L = \{ \ \}$ – leere Menge

Lernerfolgskontrolle 6: Bruchterme

1. Erweitere die folgenden Bruchterme so, dass sich die angegebenen Nenner ergeben!

1.1. Nenner: $4a^2 - 9b^2$: $\frac{2a-3b}{2a+3b} = \frac{(2a-3b)(2a-3b)}{(2a+3b)(2a-3b)} = \frac{4a^2-12ab+9b^2}{4a^2-9b^2}$

1.2. Nenner: $4x^2 - 4xy + y^2$: $\frac{3x-y}{2x-y} = \frac{(3x-y)(2x-y)}{(2x-y)^2} = \frac{6x^2-5xy+y^2}{4x^2-4xy+y^2}$

2. Kürze optimal. Denke dabei an dieFaktorenzerlegung!

2.1. $\frac{d^2-25}{10d-50} = \frac{(d-5)(d+5)}{10(d-5)} = \frac{1}{10}(d+5)$

2.2. $\frac{x^2-16z^2}{3x-12z} = \frac{(x-4z)(x+4z)}{3(x-4z)} = \frac{1}{3}(x+4z)$

3. Zerlege den Nenner in Faktoren, so findest Du den Hauptnenner; berechne dann und vereinfache optimal!

3.1. $\frac{13}{4x-16} - \frac{3}{x-4} = \frac{13}{4(x-4)} - \frac{3}{x-4} = \frac{13}{4(x-4)} - \frac{12}{4(x-4)} = \frac{1}{4(x-4)}$

3.2. $\frac{a+2}{a^2+4a+4} - \frac{2}{a+2} = \frac{a+2}{(a+2)^2} - \frac{2}{a+2} = \frac{1}{a+2} - \frac{2}{a+2} = -\frac{1}{a+2}$

3.3. $\frac{a-2}{a^2+4a+4} - \frac{2}{a+2} = \frac{a-2}{(a+2)^2} - \frac{2(a+2)}{(a+2)^2} = \frac{a-2-2a-4}{(a+2)^2} = \frac{-a-6}{(a+2)^2} = -\frac{a+6}{(a+2)^2}$

3.4. $\frac{a-4}{a+4} - \frac{a+4}{a-4} = \frac{(a-4)^2}{(a+4)(a-4)} - \frac{(a+4)^2}{(a+4)(a-4)} = \frac{a^2-8a+16}{(a+4)(a-4)} - \frac{a^2+8a+16}{(a+4)(a-4)}$

$= \frac{a^2-8a+16-(a^2+8a+16)}{(a+4)(a-4)} = \frac{a^2-8a+16-a^2-8a-16)}{(a+4)(a-4)} = -16\frac{a}{a^2-16}$

Lernerfolgskontrolle 7: Bruchgleichungen 1

1. Gib die Definitions- und Lösungsmengen der Bruchgleichungen in der Grundmenge Q an!

1.1. $\frac{7}{4x} - \frac{3}{x} + 23 = \frac{2}{3x} \quad | \cdot 12x \equiv HN$

Der Definitionebereich ist D = Q \ { 0 }.

$$21 - 36 + 276x = 8$$
$$-15 + 276x = 8$$
$$276x = 23$$
$$x = \frac{1}{12} \Rightarrow L = \{ \frac{1}{12} \}$$

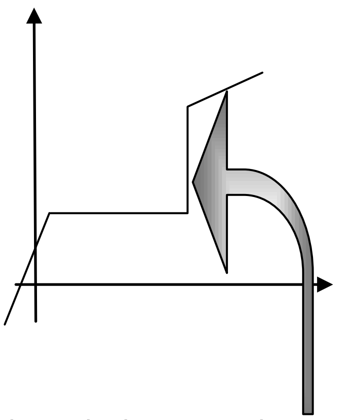
1.2. $\frac{x-4}{x-5} = 2 - \frac{x+4}{x+3} \quad | \cdot (x-5)(x+3) \equiv HN$

Der Definitionebereich ist D = Q \ { 5 ; – 3 }.

$$(x-4)(x+3) = 2(x-5)(x+3) - (x+4)(x-5)$$
$$x^2 - 4x + 3x - 12 = 2x^2 - 10x + 6x - 30 - x^2 - 4x + 5x + 20$$
$$-x - 12 = -3x - 10$$
$$2x = 2$$
$$x = 1 \Rightarrow L = \{ 1 \}$$

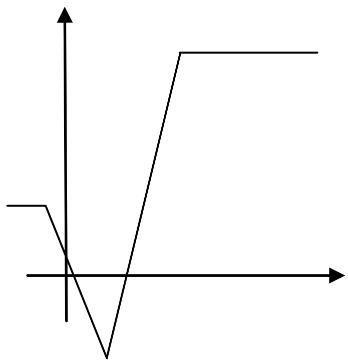
2. Stellt der Graf eine Funktion dar? Begründe jeweils Deine Entscheidung!

2.1.



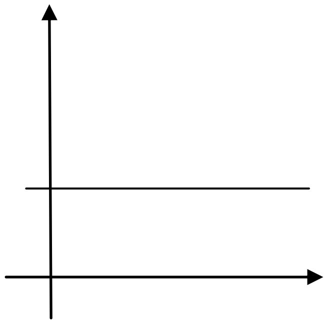
Nein, weil einem x mehrere y-Werte zugeordnet sind!

2.2.



Ja, weil jedem x genau ein y-Wert zugeordnet ist.

2.3.



Ja, weil jedem x genau ein y-Wert zugeordnet ist.

Lernerfolgskontrolle 8: Bruchgleichungen 2

1. Berechne. Notiere die Lösngsmenge, wenn die Grundmenge Z ist!

1.1. $\frac{6x}{x-4} = \frac{48}{2x-8}$ | · HN

D = Q \ { 4 } und **HN** ≡ 2(x – 4)

$12x = 48$

$x = 4$ ➔ L = { 4 }

Wenn man <u>nicht</u> bemerkt, dass der rechte Nenner den linken als Faktor beinhaltet, kommt man zu folgender (etwas komplizierterer) Gleichung:

$x^2 - 8x + 16 = 0$

$(x - 4)^2 = 0$

$x_{1/2} = 4$ ➔ L = { 4 }

1.2. $\frac{1}{2x+5} = \frac{1}{8x+3}$ | · HN

D = Q \ { –2,5 ; –0,375 } und **HN** ≡ (2x + 5)(8x + 3)

$8x + 3 = 2x + 5$

$6x = 2$

$x = \frac{1}{3}$ ➔ L = { }

1.3. $\frac{7}{4x} - \frac{2}{x} + 15 = \frac{6}{3x}$ ← !!!

$\frac{7}{4x} - \frac{2}{x} + 15 = \frac{2}{x}$ | · HN

D = Q \ { 0 } und **HN** ≡ 4x

$7 - 8 + 60x = 8$

$60x = 9$

$x = 0{,}15$ ➔ L = { }

1.4. $\frac{x-3}{x-5} = 2 - \frac{x-5}{x-7}$ | · HN

D = Q \ { 5 ; 7 } und **HN** ≡ (x – 5)(x – 7)

$(x - 3)(x - 7) = 2(x - 5)(x - 7) - (x - 5)^2$

$x^2 - 7x - 3x + 21 = 2x^2 - 14x - 10x + 70 - x^2 + 10x - 25$

$-10x + 21 = -14x + 45$

$4x = +24$

$x = 6$ ➔ L = { 6 }

2. Berechne. Wie heißt der Definitionsbereich, der Hauptnenner und die Lösungsmenge, wenn G = Q ist?

$$\frac{40}{x^2-9} + \frac{10}{x+3} - \frac{8}{x-3} = 0 \qquad | \cdot HN$$

D = Q \ { ± 3 } und **HN** ≡ x² – 9

$40 + 10(x - 3) - 8(x + 3) = 0$

$40 + 10x - 30 - 8x - 24 = 0$

$2x - 14 = 0$

$x = 7$ ➔ **L** = { 7 }